Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel

SoSe 2018
17.09.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektro- und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (10+10=20 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme auf einem geeigneten Intervall:

a) $y' = \frac{xe^{-y^2}}{y}$ mit $y(0) = 1$,

b) $y' + y + xy^3 = 0$ mit $y(0) = 1$.

Lösung:

a) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation der Vorlesung sei $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$, und $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto \frac{e^{-y^2}}{y}$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) \quad = \quad \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}x^2$$

für alle $x \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y(0)}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_1^y e^{s^2} s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(e^{y^2} - e).$$

Laut Vorlesung ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \sqrt{\ln(x^2 + e)}.$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist und $y(I_{x_0}) \subseteq J = (0, \infty)$, also $I_{x_0} = \mathbb{R}$.

b) Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 3$. Sie hat $y \equiv 0$ als eine Lösung, die jedoch die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ nicht erfüllt; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir mit $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ multiplizieren und anschließend mit $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^{-2}$ substituieren. Dies führt auf

$$z'(x) - 2z(x) - 2x = 0.$$

Die homogene Gleichung $z'(x) = 2z(x)$ hat die allgemeine Lösung $z_h(x) = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$, und mittels Variation der Konstanten erhalten wir $z_p(x) = -x - \frac{1}{2}$ als spezielle Lösung der inhomogen

— bitte wenden —

Gleichung. Alternativ kann eine partikuläre Lösung mit dem *Ansatz vom Typ der rechten Seite* $z_p(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ermittelt werden. Die allgemeine Lösung der Gleichung für z ist damit

$$z(x) = ce^{2x} - x - \frac{1}{2}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbeding liefert:

$$y(0)^{-2} = z(0) = ce^0 - 0 - \frac{1}{2} = c - \frac{1}{2} \overset{!}{=} 1^{-2} = 1$$

und somit folgt $c = \frac{3}{2}$. Aus Stetigkeitsgründen ist $z(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - x - \frac{1}{2} > 0$ für alle x in einer Umgebung von 0. Wir können sogar $z(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zeigen: Für $|x| \to \infty$ gilt $z(x) \to \infty$ und $z'(x) = 0$ liefert uns den einzigen kritischen Punkt $x_0 = -\frac{1}{2}\ln(3)$. Da es der einzige kritische Punkt ist, nimmt z in x_0 sein globales Minimum an. Mithin ergibt sich

$$z(x) \geq z(x_0) = \frac{3}{2}e^{2x_0} - x_0 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}e^{-\ln(3)} + \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln(3) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt löst $y(x) = z(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}e^{2x} - x - \frac{1}{2}}}$ daher das gegebene Anfangswertproblem auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (10+10=20 Punkte)

a) Ermitteln Sie ein Fundamentalsystem zum homogenen Problem

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

b) Ein Fundamentalsystem für

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$$

ist gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^{-2t} \\ e^{3t} & e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie damit die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Das charakteristische Polynom p_A von $A := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ist

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -5 \\ 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Seine Nullstellen sind also

$$\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{4-4\cdot 2}}{2} = 1+\mathrm{i}, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-\mathrm{i}.$$

Die Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = 1+\mathrm{i}$ (mit Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 1-\mathrm{i}$ (mit Vielfachheit 1). Wir bestimmen einen Eigenvektor $\vec{v}_1$ zu λ_1:

$$\begin{aligned} \lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -2+\mathrm{i} & -5 \\ 1 & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \mid \cdot(-2-\mathrm{i}) \quad &\sim \begin{pmatrix} 5 & 10+5\mathrm{i} \\ 1 & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \mid \cdot\left(\tfrac{1}{5}\right) \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} \\ 1 & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach der Vorlesung bilden

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1(t) &= \mathfrak{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\right) = \mathfrak{Re}\left(e^t(\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t))\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\right) = e^t\begin{pmatrix} 2\cos(t)-\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_2(t) &= \mathfrak{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\right) = e^t\begin{pmatrix} 2\sin(t)+\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_1 & \vec{\phi}_2 \end{pmatrix}$ für $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$.

b) Der Vollständigkeit halber berechnen wir zunächst ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$, wobei wir $A := \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ gesetzt haben. (Dies ist in der Aufgabenstellung nicht gefordet, das Fundamentalsystem ist angegeben.) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+7 & -10 \\ 5 & \lambda-8 \end{pmatrix} = (\lambda+7)(\lambda-8)+50 = \lambda^2-\lambda-6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$$

Die Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = 3$ (mit Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = -2$ (mit Vielfachheit 1). Der Eigenraum zu λ_1 ist

$$E_A(3) = \mathrm{Kern}(3I-A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

d.h. die erste Fundamentallösung ist

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zu λ_2 ist gegeben durch

$$E_A(-2) = \mathrm{Kern}(-2I-A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

und somit ist

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— bitte wenden —

eine weitere Fundamentallösung. Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^{-2t} \\ e^{3t} & e^{-2t} \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit

$$\vec{y}_{\text{hom}}(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Hier beginnt die eigentliche Lösung der Aufgabe: Eine spezielle Lösung $\vec{y}_p$ der inhomogenen Gleichung lässt sich nun mit Variation der Konstanten bestimmen. Nach Vorlesung gilt

$$\vec{y}_{\text{p}}(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Mit

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{\det\Phi(t)}\begin{pmatrix} e^{-2t} & -2e^{-2t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-3t} & 2e^{-3t} \\ e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) := \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

erhalten wir also

$$\vec{y}_{\text{p}}(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s = \Phi(t)\begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t}-e^{2t} \\ e^{3t}-e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_{\text{p}}(t) + \vec{y}_{\text{hom}}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}-e^{2t} \\ e^{3t}-e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^{-2t} \\ e^{3t} & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff c_1 = -1,\, c_2 = 1.$$

Und als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} -e^{3t} + 2e^{-2t} + e^{3t} - e^{2t} \\ -e^{3t} + e^{-2t} + e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - e^{2t} \\ e^{-2t} - e^{2t} \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (7+13=20 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - 3\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = x - t, & x,t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes eine Lösung $u \in C^2([0,1]\times[0,\infty))$ der eindimensionalen Wellengleichung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,1)\times[0,\infty), \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in [0,1], \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Lösung:

a) Es liegt eine eindimensionale Transportgleichung vor. Wir bringen Sie in die korrekte Form um die Lösungsformel aus der Vorlesung anzuwenden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \underbrace{(-3)}_{=:a}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = x - t =: g(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = x^2 =: f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Lösungsformel für die Transportgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-ta) + \int_0^t g(x-(t-\tau)a,\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= f(x+3t) + \int_0^t g(x+3(t-\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= (x+3t)^2 + \int_0^t (x+3(t-\tau)-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= (x+3t)^2 + \int_0^t (x+3t-4\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= (x+3t)^2 + \Big[(x+3t)\tau - 2\tau^2\Big]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= x^2 + 6xt + 9t^2 + (x+3t)t - 2t^2 \\ &= x^2 + 7xt + 10t^2 \end{aligned}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

b) Seien $x \in (0,1)$ und $t > 0$. Aus dem Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ folgt

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = w''(t)v(x) - w(t)v''(x).$$

— bitte wenden —

Folglich existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} \equiv \lambda.$$

Für v, w ergeben sich damit die Differentialgleichungen

$$w''(t) = \lambda w(t) \quad \text{für alle } t > 0, \tag{2}$$
$$v''(x) = \lambda v(x) \quad \text{für alle } x \in (0,1). \tag{3}$$

$\underline{\lambda = 0:}$ Aus (3) folgt $v(x) = ax + b$ für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Wegen $0 = u(0,t) = v(0)w(t)$ ergibt sich $b = 0$ oder $w \equiv 0$. Mit $0 = u(1,t) = v(1)w(t) = (a+b)w(t)$ erhalten $w \equiv 0$ oder $a = b = 0$. Somit ist $v \equiv 0$ oder $w \equiv 0$, also $u \equiv 0$. Aber $u \equiv 0$ löst die Wellengleichung (1) nicht.

$\underline{\lambda > 0:}$ Die allgemeine Lösung von (3) ist gegeben durch

$$v(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (x \in (0,1))$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$.
Durch die Randbedingungen ergibt sich:

(i) $u(0,t) = 0 \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} v(0) = A + B$, d.h. $v(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Ae^{-\sqrt{\lambda}x} = A\left[e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right]$.

(ii) $u(1,t) = 0 \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} v(1) = A\left[e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}\right]$. Der Ausdruck in Klammern ist stets ungleich 0, da $\lambda > 0$. Demnach gilt $A = 0$ und somit $v \equiv 0$ und $u \equiv 0$. Widerspruch zu u löst (1).

$\underline{\lambda < 0:}$ Die allgemeine Lösung von (3) ist gegeben durch

$$v(x) = A\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \quad (x \in (0,1))$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$.
Durch die Randbedingungen ergibt sich:

(i) $u(0,t) = 0 \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} v(0) = B. \rightsquigarrow v(x) = A\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$.

(ii) $u(1,t) = 0 \rightsquigarrow 0 \overset{!}{=} v(1) = A\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)$. Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, muss daher die Bedingung $\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0$ erfüllt sein, d.h. $\sqrt{-\lambda} \in \{k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\lambda \in \left\{-k^2\pi^2 : k \in \mathbb{N}\right\}$.

Demnach soll w die DGl (2) mit $\lambda = -k^2\pi^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$ lösen. Die allgemeine Lösung von (2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} w(t) &= C\sin\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + D\cos\left(\sqrt{-\lambda}t\right) \\ &= C\sin(k\pi t) + D\cos(k\pi t) \quad (t > 0) \end{aligned}$$

mit Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{N}$. Durch die Anfangsbedingungen ergibt sich:

(i) $0 \overset{!}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x)w'(0) = A\sin(k\pi x)\left[Ck\pi\cos(k\pi 0) - Dk\pi\sin(k\pi 0)\right] = ACk\pi\sin(k\pi x)$. Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, muss $A \neq 0$ gelten. Daher folgt $C = 0$ und $w(t) = D\cos(k\pi t)$.

(ii) $\sin(\pi x) \overset{!}{=} u(x,0) = v(x)w(0) = A\sin(k\pi x)D\cos(k\pi 0) = AD\sin(k\pi x)$. Durch die Wahl $A = D = 1$ und $k = 1$ erhalten wir daher die Lösung

$$u(x,t) := \sin(\pi x)\cos(\pi t).$$

— bitte wenden —

Eine Probe zeigt, dass die so definierte Funktion $u \in C^2([0,1] \times [0,\infty))$ tatsächlich eine Lösung von (1) ist.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Dienstag, den **16.10.2018**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) und unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **18.10.2018**, von **16 bis 18 Uhr** im **Hörsaal am Fasanengarten (Geb. 50.35)** statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **22.10.2018** bis **26.10.2017** statt.