UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

07.04.2000
Frühjahr 2000

DIPLOM–VORPRÜFUNG

zur Höheren Mathematik für Elektroingenieure und Physiker

3. KLAUSUR

1. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$u(x,y) = f(x)\cos y + e^x \cos y \quad ,$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist.

a) Geben Sie alle Funktionen f an, für die u Realteil einer holomorphen Funktion ist.

b) Sei nun $f(x) = \cosh x$. Bestimmen Sie alle auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen h mit Realteil u in der Form $h = h(z)$.

c) $\tilde{h}(z)$ bezeichne nun eine der in b) bestimmten Funktionen h. Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \int_\gamma \tilde{h}(z)\, dz \quad \text{und} \quad I_2 = \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

entlang des Weges

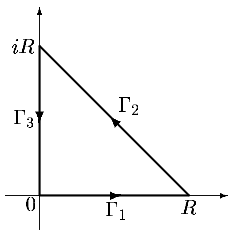
$$\gamma \,:\, z = e^{\sin t}\cos^2 t + i \sinh t\, \sin t \quad , \quad 0 \le t \le \pi \,.$$

2. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben sind die Funktion

$$f(z) = \frac{z^5 e^{(i-1)z}}{4+z^4}$$

und der nebenan skizzierte Integrationsweg $\Gamma_R = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$.



a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, in denen f nicht holomorph ist, und geben Sie jeweils die Art der Singularität an. Bestimmen Sie für eine von Ihnen gewählte Polstelle das Residuum.

b) Zeigen Sie, daß gilt: $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = 0$.
Hinweis: Verschaffen Sie sich eine Abschätzung für $\max\limits_{z\in\Gamma_2} |f(z)|$, indem Sie zunächst (am besten anhand der Skizze) $\max\limits_{z\in\Gamma_2} |z|$ und $\min\limits_{z\in\Gamma_2} |z|$ bestimmen.

c) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{x^5 e^{-x}\cos x}{4+x^4}\, dx \quad .$$

Die Existenz des uneigentlichen Integrals braucht nicht gezeigt zu werden.

3. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad xy'' + (1-2x^2)y' - 4xy = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad .$$

Lösen Sie $(*)$ mit Hilfe des verallgemeinerten Potenzreihenansatzes

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho} \quad .$$

4. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(\star) \qquad y' + 2(\cos x)^2\, y + \sin x \;\; y^2 = \cos x + \sin x + (\cos x)^2 \sin x \quad .$$

a) Für welche reellen Zahlen α und β gibt es Lösungen von $(\star)$ mit $y(0) = \alpha$ und $y'(0) = \beta$?

b) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$v(x) = \sin x$$

eine Lösung von $(\star)$ ist.

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $(\star)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = v(x) + \frac{1}{u(x)} \quad .$$

d) Geben Sie alle Lösungen von $(\star)$ an, die $y(0) = 0$ erfüllen.

e) Geben Sie alle Lösungen von $(\star)$ an, für die $y(0) = y'(0)$ gilt.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, dem 19. April, vor dem Sekretariat aus und liegen unter
`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`
im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Mittwoch, dem 3. Mai, von 13.10 bis 13.45 Uhr im S 31 statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.
Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 8. bis 11. Mai.