Lösung zur 3. Klausur Diplom-Vorprüfung am 07.04.2000

1. Aufgabe

$$u(x,y) = f(x)\cos y + e^x \cos y$$

a) u ist Realteil einer holomorphen Funktion $\Longleftrightarrow \Delta u = 0$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f''(x)\cos y + e^x \cos y - f(x)\cos y - e^x\cos y$$
$$= \left(f''(x) - f(x)\right)\cdot \cos y = 0 \qquad (\forall\, x,y \in \mathbb{R}^2)$$

$\Longleftrightarrow f''(x) - f(x) = 0$ lin DGL mit konstanten Koeff.

Ansatz: $f(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

also: $\underline{f(x) = A\cdot e^x + B\cdot e^{-x}}$ $\quad A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$

[speziell: $A = B = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ (siehe b) Teil)]

b) $u(x,y) = \cosh x \cos y + e^x \cos y$

$h(z) = h(x+iy) = g(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ ist holomorph, wenn u und v die Cauchy-Riemannschen DGLen erfüllen; d.h. es muß gelten

$u_x \overset{!}{=} v_y$ und $u_y = -v_x$

$v_y \overset{!}{=} u_x = \sinh x \cos y + e^x \cos y \Rightarrow v = \sinh x \sin y + e^x \sin y + \tilde{c}(x)$

weiter: $-v_x = -\cosh x \sin y - e^x \sin y - \tilde{c}'(x) \overset{!}{=} u_y = -\cosh x \sin y - e^x \sin y$

$\Rightarrow \tilde{c}'(x) = 0 \Rightarrow \tilde{c}(x) = c = \text{konst} \in \mathbb{R}$

also: $\underline{v(x,y) = \sinh x \sin y + e^x \sin y + c}$

$\Rightarrow$

$$u(x,y) + i\,v(x,y) = \cosh x\cos y + e^x\cos y + i\left(\sinh x \sin y + e^x \sin y + c\right)$$
$$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y + e^x \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{=e^{iy}} + ic =$$
$$= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cdot\cos y + \tfrac{1}{2} i (e^x - e^{-x})\sin y + e^x \cdot e^{iy} + ic \overset{z = x+iy}{=}$$
$$= \tfrac{1}{2} e^x(\cos y + i \sin y) + \tfrac{1}{2} e^{-x}\underbrace{(\cos y - i \sin y)}_{=\cos(-y) + i\sin(-y)} + e^z + ic =$$
$$= \tfrac{1}{2} e^x e^{iy} + \tfrac{1}{2} e^{-x}\cdot e^{-iy} + e^z + ic = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) + e^z + ic =$$
$$= \underline{\underline{\cosh z + e^z + ic = h(z)}}, \quad c \in \mathbb{R},\ \text{konstant}$$

c) $\gamma: e^{\sin t}\cos^2 t + i \sinh t \sin t = z \qquad 0 \le t \le \pi$

$t = 0: \ z = 1$
$t = \pi: \ z = 1$ $\Big\}$ γ ist geschlossene Kurve

$\Rightarrow I_1 = \int_\gamma \tilde{h}(z)\,dz = 0$, da γ geschlossen und $\tilde{h}(z)$ holomorph

$I_2 = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \Rightarrow$ Polstelle in $z_0 = 0$

„Frage": Liegt $z_0 = 0$ innerhalb des von γ begrenzten Gebiets G ?

$$\underset{z\in\gamma}{\operatorname{Re} z} = \underset{>0}{e^{\sin t}}\,\underset{\ge 0}{\cos^2 t} \ge 0, \quad \text{wobei } z_0 = 0 \notin \gamma$$

$\Rightarrow \gamma$ verläuft nie in der linken Halbebene $\Rightarrow z_0 = 0$ kann nicht im Innern von G liegen $\Rightarrow \frac{1}{z}$ ist im Innern von G holomorph

$\Rightarrow \underline{\underline{I_2 = 0}}$

2. Aufgabe

$$f(z) = \frac{z^5 e^{(i-1)z}}{4 + z^4}$$

a) f nicht holomorph $\Rightarrow$ Nennernullstellen suchen:

$4 + z^4 = 0 \Longleftrightarrow z^4 = -4 = 4\cdot e^{i\pi + 2k\pi i}$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Longleftrightarrow z_k = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} i}$, $k = 0,1,2,3$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow z_0 &= \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} &&= 1+i \\ z_1 &= \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} &&= -1+i \\ z_2 &= \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{5}{4}\pi} &&= -1-i \\ z_3 &= \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{7}{4}\pi} &&= 1-i \end{aligned}\right\}$$

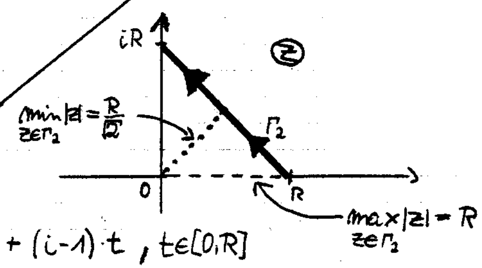
jeweils <u>Polstelle 1. Ordnung</u>, da $(4+z^4)'\big|_{z_k} = 4z^3\big|_{z_k} \neq 0$, wobei der Zähler von $f(z)$ für $z=z_k$ ungleich Null ist

<u>Wahl</u>: $z_0 = 1+i$ Polstelle 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f, 1+i) = \lim_{z\to 1+i} (z-(1+i))\cdot f(z) = \frac{z^5 e^{(i-1)\cdot z}}{(4+z^4)'}\bigg|_{z=1+i} = \frac{z^{\cancel{5}\,2} e^{(i-1)z}}{4\cancel{z^3}}\bigg|_{z=1+i}$$

$$= \frac{(1+i)^2 e^{-2}}{4} = \underline{\underline{\frac{i}{2e^2}}}$$

b) Betrachte: $\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$



Parametrisierung von Γ_2: $z = R + (i-1)\cdot t$, $t\in[0,R]$

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\Gamma_2} |f(z)|\,dz \leq \text{Länge von } \Gamma_2 \cdot \max_{z\in\Gamma_2} |f(z)|$$

$$= \sqrt{2}\cdot R \cdot \max_{z\in\Gamma_2} \frac{|z^5|\cdot|e^{(i-1)z}|}{|4+z^4|} \leq \sqrt{2}R\,\frac{\max_{z\in\Gamma_2}|z^5| \cdot \max_{z\in\Gamma_2}|e^{(i-1)z}|}{\min_{z\in\Gamma_2}|4+z^4|} = (*)$$

- $\max_{z\in\Gamma_2}|z^5| = (\max_{z\in\Gamma_2}|z|)^5 = R^5$ ↖ siehe Skizze
- $\min_{z\in\Gamma_2}|4+z^4| \geq \min_{z\in\Gamma_2}\big||z^4|-4\big| \underset{|z|>\sqrt{2}}{=} \min_{z\in\Gamma_2}(|z^4|-4) = (\min_{z\in\Gamma_2}|z|)^4 - 4 \overset{\text{siehe Skizze}}{=} \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^4 - 4 = \frac{R^4}{4} - 4$

  d.h. f. $R > 2\sqrt{2}$
- Parametrisierung in $|e^{(i-1)z}|$ einsetzen:

$$\left|e^{(i-1)\cdot(R+(i-1)t)}\right| = \left|e^{R(i-1)+(-2i)t}\right| = \left|e^{-R}\cdot e^{i(R-2t)}\right| = |e^{-R}|\cdot\underbrace{|e^{i(R-2t)}|}_{=1} = e^{-R}$$

$$\Rightarrow (*) = \sqrt{2}R\,\frac{R^5\cdot e^{-R}}{\frac{R^4}{4}-4} = \sqrt{2}R\cdot 4\,\frac{R^5 e^{-R}}{R^4-16} \xrightarrow{R\to\infty} \underline{\underline{0}}$$

also: $\underline{\underline{\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0}}$

c)

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = (\circledast)$$

$$= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, 1+i) \overset{a)}{=} 2\pi i\cdot\frac{i}{2e^2} = \frac{-\pi}{e^2}$$

Parametrisierung von Γ_1 und Γ_3:

Γ_1: $z = t$ $\quad t\in[0,R]$ $\Rightarrow dz = dt$

$-\Gamma_3$: $z = it$ $\quad t\in[0,R]$ $\Rightarrow dz = i\,dt$

$$(\circledast) = \int_0^R \frac{t^5 e^{(i-1)t}}{4+t^4}\,dt + \int_{\Gamma_2} \ldots\,dz + \int_R^0 \frac{(it)^5 e^{(i-1)it}}{4+(it)^4}\,i\,dt$$

$$= \text{——}''\text{——} + \text{——}''\text{——} + \int_R^0 \frac{i t^5 e^{(-1-i)t}}{4+t^4}\,i\,dt$$

$$= \int_0^R \frac{t^5 e^{-t} e^{it}}{4+t^4}\,dt + \text{——}''\text{——} + \int_0^R \frac{t^5 e^{-t}\cdot e^{-it}}{4+t^4}\,dt$$

Integrale über Γ_1 und Γ_3 zusammenfassen

$$= \int_0^R \frac{t^5 e^{-t}}{4+t^4}(e^{it}+e^{-it})\,dt + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\int_0^R \frac{t^5 e^{-t}}{4+t^4}\,2\cdot\cos t\,dt + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{-\pi}{e^2}$$

$\downarrow R\to\infty$ $\qquad$ siehe b) $\downarrow R\to\infty$ $\qquad \downarrow R\to\infty$

$$2\cdot\int_0^\infty \frac{t^5 e^{-t}}{4+t^4}\cos t\,dt + 0 = -\frac{\pi}{e^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^5 e^{-t}}{4+t^4}\cos t\,dt = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2e^2}}}$$

3. Aufgabe

(*) $$xy'' + (1-2x^2)y' - 4xy = 0 \quad , \quad y(0)=1 \; , \; y'(0)=0 \qquad \text{(AWP)}$$

Verallgemeinerter Potenzreihenansatz:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho} \; , \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho) a_n x^{n+\rho-1} \; , \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho)(n+\rho-1) a_n x^{n+\rho-2}$$

einsetzen in DGL:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho)(n+\rho-1)\cdot a_n x^{n+\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho) a_n x^{n+\rho-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\rho) a_n x^{n+\rho+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^{n+\rho+1} =$$

$$= \sum_{n=-2}^{\infty} (n+\rho+2)(n+\rho+1) a_{n+2} x^{n+\rho+1} + \sum_{n=-2}^{\infty} (n+\rho+2) a_{n+2} x^{n+\rho+1} +$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\rho) a_n x^{n+\rho+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^{n+\rho+1}$$

$$= \rho(\rho-1)\cdot a_0 x^{\rho-1} + (\rho+1)\rho a_1 x^{\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho+2)(n+\rho+1) a_{n+2} x^{n+\rho+1} +$$
$$+ \rho\cdot a_0 x^{\rho-1} + (\rho+1)\cdot a_1 x^{\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho+2) a_{n+2} x^{n+\rho+1} +$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\rho) a_n x^{n+\rho+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^{n+\rho+1}$$

$$= \rho^2 a_0 x^{\rho-1} + (\rho+1)^2 a_1 x^{\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+\rho+2)^2 a_{n+2} - (2(n+\rho)+4) a_n \Big) x^{n+\rho+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$

- $\rho^2 a_0 \overset{!}{=} 0 \overset{a_0 \neq 0}{\Rightarrow} \underline{\underline{\rho_{1,2} = 0}}$
- $(\rho+1)^2 a_1 \overset{!}{=} 0 = 1 \cdot a_1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 0}}$
- $(n+\rho+2)^2 a_{n+2} - (2(n+\rho)+4) a_n = 0$

mit $\rho = 0$:

$$(n+2)^2 a_{n+2} - (2n+4) a_n = 0$$

$\Rightarrow$ Rekursionsformel: $$a_{n+2} = \frac{2n+4}{(n+2)^2} a_n = \frac{2}{n+2} a_n$$

und, wegen $\rho = 0$: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y(0) = \underline{\underline{a_0 \overset{!}{=} 1}}$

Achtung: Statt der Festlegung $a_0 \neq 0$ ($\Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow a_1 = 0$) hätte auch $a_1 \neq 0$ ($\Rightarrow \rho = -1 \Rightarrow a_0 = 0$) genommen werden können – das Endergebnis wäre dasselbe.

Damit folgt, wegen $a_1 = 0$ (vollst. Ind. nicht notwendig, da offensichtlich...):

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{a_{2k+1} = 0 \quad k \in \mathbb{N}}}$$

und mit $a_0 = 1$:

$$a_2 = \frac{2}{2}\cdot 1 = 1 \;; \quad a_4 = \frac{2}{4}\cdot 1 = \frac{1}{2} \;; \quad a_6 = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$$

Vermutung: $a_{2k} = \frac{1}{k!} \; , \; k \in \mathbb{N}$

Beweis durch vollständige Induktion:

Ind. Anfang: $a_0 = \frac{1}{0!} = 1$ ok.

Ind. Annahme: $a_{2k} = \frac{1}{k!}$ stimme für ein $k \in \mathbb{N}$

Ind. Schluß: $a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = \frac{2}{2k+2} \cdot a_{2k} \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{2}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$ stimmt

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{a_{2k+1}=0}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} = \underline{\underline{e^{x^2}}}$$

$\Rightarrow y(0) = e^0 = 1$ erfüllt (klar, da $a_0 = 1$ so gewählt wurde)

$y'(0) = 2x e^{x^2}\big|_0 = 0$ stimmt auch (mehr oder weniger „zufällig"...)

[Beachte: Wäre $y'(0) \neq 0$ gefordert worden, müßte eine zweite Basislösung bestimmt werden (Reduktionsansatz), da e^{x^2} dies nicht leisten kann]

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = e^{x^2}}}$ löst das AWP (*)

4. Aufgabe

(*) $$y' + 2\cos^2 x \, y + \sin x \, y^2 = \cos x + \sin x + \cos^2 x \sin x$$

a) $y(0) = \alpha$ und $y'(0) = \beta$ sowie $x = 0$ in (*) einsetzen:

$$\beta + 2\alpha + 0 = 1 + 0 + 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 1 - 2\alpha}}$$

d.h. wählt man $y(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ frei, so liegt $y'(0) = \beta = 1 - 2\alpha$ fest

b) $v(x) = \sin x \Rightarrow v'(x) = \cos x$

einsetzen in (*):

$$\cos x + 2\cos^2 x \sin x + \sin^3 x = \cos x + \sin x(\cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$= \cos x + \sin x(\cos^2 x + 1)$$
$$= \underline{\underline{\cos x + \sin x + \cos^2 x \sin x}} \quad \text{ok.}$$

c) (*) ist eine Riccatische DGL:

$$y' + f(x)\,y + g(x)\,y^2 = r(x)$$

mit $f(x) = 2\cos^2 x$, $g(x) = \sin x$, $r(x) = \cos x + \sin x + \cos^2 x \sin x$

$\Rightarrow$ Ansatz: $y(x) = v(x) + \frac{1}{u(x)} = \sin x + \frac{1}{u(x)}$

$$\Rightarrow y' = \cos x - \frac{u'}{u^2}$$

einsetzen (oder Formel aus Vorlesung, Übung ... verwenden)

$$\cos x - \frac{u'}{u^2} + 2\cos^2 x \sin x + \frac{2\cos^2 x}{u} + \sin^3 x + \frac{2\sin^2 x}{u} + \frac{\sin x}{u^2} =$$
$$= \cos x + \sin x + \cos^2 x \sin x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{u'}{u^2} + \cos^2 x \sin x + \frac{2}{u} + \sin^3 x + \frac{\sin x}{u^2} - \sin x = 0$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \sin x(\cos^2 x + \sin^2 x - 1) + \frac{2}{u} + \frac{\sin x}{u^2} = 0 \quad | \cdot u^2$$

$\Rightarrow \underline{\underline{u' - 2u = \sin x}}$ Lineare inhomog. DGL 1. Ordnung für $u(x)$

homogene DGL:

$u' - 2u = 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_h(x) = A \cdot e^{2x}}}$ $A \in \mathbb{R}$

inhomog. DGL $\rightarrow$ Ansatz mit Var. d. Konstanten

$u = C(x)e^{2x} \Rightarrow u' = C'e^{2x} + 2Ce^{2x}$

einsetzen: $C'e^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = \sin x \Rightarrow C'(x) = e^{-2x}\sin x$

partielle Integration oder Bronstein ...

$$\Rightarrow C(x) = \int^x \sin\tilde{x}\, e^{-2\tilde{x}}\, d\tilde{x} = \dots = \frac{-e^{-2x}}{5}(2\sin x + \cos x)$$

$\Rightarrow$ spezielle Lösung: $u_s(x) = C(x) \cdot e^{2x} = -\frac{1}{5}(2\sin x + \cos x)$

$\Rightarrow u_{ges} = A \cdot e^{2x} - \frac{1}{5}(2\sin x + \cos x)$

Rücksubstitution gemäß dem Ansatz:

$$\underline{\underline{y(x) = \sin x + \frac{1}{A\cdot e^{2x} - \frac{1}{5}(2\sin x + \cos x)}}}$$ ist die allg. Lösung von (*) ($A \in \mathbb{R}$, konstant)

d) $y(0) = 0$ ist erfüllt für $\underline{\underline{v(x) = \sin x}}$

[Wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard–Lindelöf ist dies die einzige Lösung für das AWP (*) u. $y(0) = 0$. Diese Lösung ist in der oben berechneten allg. Lösung asymptotisch enthalten, nämlich für $|A| \to \infty$]

e) $y(0) = y'(0)$ d.h. $\alpha = \beta$ (siehe a))

$$\Rightarrow \alpha = 1 - 2\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \tfrac{1}{3} = y(0) = y'(0)}$$

also: $y(0) = 0 + \frac{1}{A\cdot 1 - \frac{1}{5}(2\cdot 0 + 1)} = \frac{1}{A - \frac{1}{5}} \overset{!}{=} \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{5A - 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow A = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \sin x + \frac{1}{\frac{16}{5}e^{2x} - \frac{1}{5}(2\sin x + \cos x)}}}$$ löst (*) und erfüllt $y(0) = y'(0) \; (= \frac{1}{3})$

Einzige Lösung, da das AWP (*) und $y(0) = \frac{1}{3}$ nur eine Lösung haben kann (s.o.: E.E. Satz von Picard-Lindelöf) bzw. da in der allg. Lösung $A = \frac{16}{5}$ durch die Forderung $y(0) = \frac{1}{3}$ eind. festgelegt ist.