VD HM III 27. März 2001

Lösung: Aufgabe 1

a) $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 = e^{2k\pi i}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\rightsquigarrow$ $z_k = k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$ sind alle Nullstellen von $\sinh(z)$

b) $\xi = f(z) = \cosh(z)$ ist holomorph in $\mathbb{C}$ und, da $f'(z) = \sinh(z)$, nach a) konform für $\mathbb{C} \setminus \{k\pi i / k \in \mathbb{Z}\}$, also ist $\cosh(z)$ insbesondere in S konform.

Zur Bestimmung von $f(S)$:

Da f in S konform ist, geht "Rand in Rand" und "links in links" über

Der Rand ∂S von S zerfällt in die (mathematisch positiv) orientierten Teile I, II, III:

I: $z(t) = -t + i\pi$, $-\infty < t \leq 0$.

I' = Bild von I: $f(z(t)) = -\cosh(t)$, $-\infty < t \leq 0$.
$I' = (-\infty, -1]$

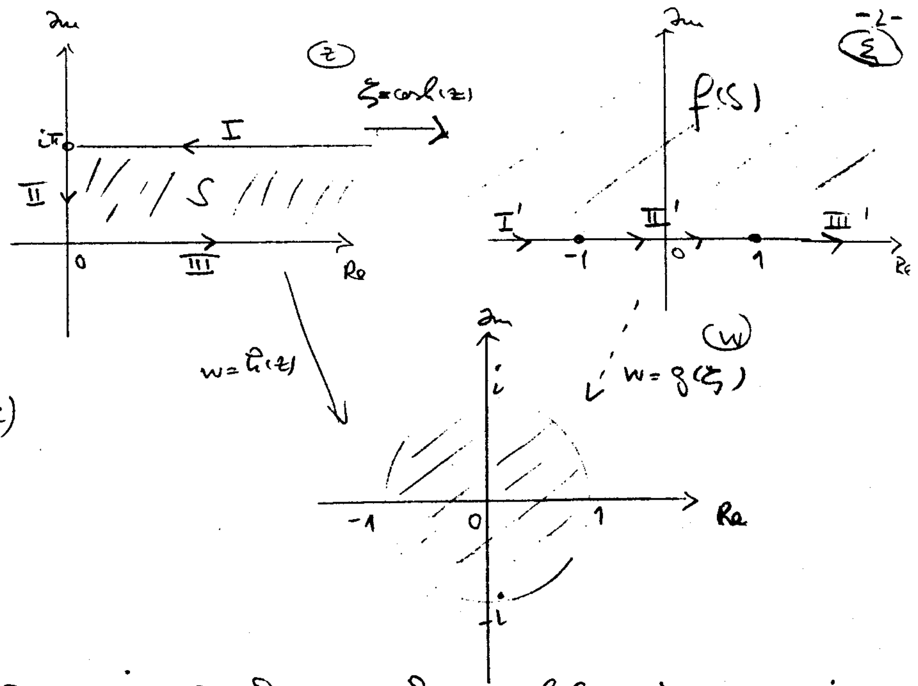
II: $z(t) = (1-t)i\pi$, $0 \leq t \leq 1$.

II' = Bild von II: $f(z(t)) = -\cos \pi t$, $0 \leq t \leq 1$
$II' = [-1, +1]$

III: $z(t) = t$, $0 \leq t < \infty$

III' = Bild von III: $f(z(t)) = \cosh t$, $0 \leq t < \infty$
$III' = [1, \infty)$

$f(S)$ ist das "links" von I' + II' + III' liegende Gebiet der ξ-Ebene. Es ist $f(S) = \{\xi \mid \mathrm{Re}\, \xi > 0\}$.



c)

Die gesuchte Funktion $w = h(z)$ erhalten wir, wenn wir $f(S)$ mittels einer Möbiustransformation $w = g(\xi)$ auf $\{w \mid |w| < 1\}$ abbilden, in der Form

$$w = h(z) = g(\cosh(z)).$$

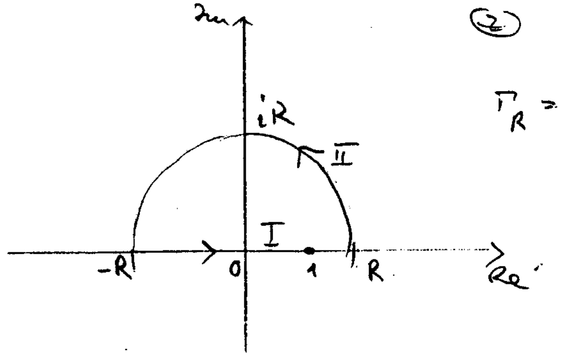
Bestimmung von g: $w = g(\xi) = \dfrac{a\xi + b}{c\xi + d}$

mit $h(0) = g(1) = 1$, $h(i\frac{\pi}{2}) = g(0) = -i$, $h(i\pi) = g(-1) = -1$ erhält man $a = d$, $b = c = -id$

also: $w = g(\xi) = i\dfrac{\xi - i}{\xi + i}$ und schließlich

$$w = h(z) = i\,\frac{\cosh(z) - i}{\cosh(z) + i}$$

Lösung Aufgabe 2



(2)

$\Gamma_R = \{x \mid -R \le x \le R\}$ (I)

$\cup \{z \mid z = Re^{it},\ 0 \le t \le \pi\}$ (II)

a) Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x \cos x - x}{x^2}$

ist stetig für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ und in $x = 0$

stetig ergänzbar durch $f(0) := 0$, denn:

$$\sin x \cos x - x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right) - x$$

$$= x^3\left(-\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + O(x^4) \quad (x \to 0)$$

also $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Damit ist f über jedes Intervall $(-\alpha, \alpha)$ $(\alpha > 0)$ integrabel. Da f ungerade ist, gilt

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0.$$

b) $g(z) = \frac{1}{z^2}\left(e^{2iz} - 1 - 2iz\right)$ läßt sich nach $z = 0$ holomorph fortsetzen wegen $e^{2iz} = 1 + 2iz + \frac{1}{2!}(2iz)^2 + \dots$

$$\leadsto \quad g(z) = \frac{1}{2!}(-4) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!}(2i)^k z^{k-2}$$

also:

$$G(z) := \begin{cases} g(z), & z \neq 0 \\ -2, & z = 0 \end{cases}$$

ist holomorph für $z \in \mathbb{C}$.

Mit dem Cauchy Integralsatz gilt $\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} G(z)\,dz = 0$ für jedes $R > 0$.

c) $0 = \int_{\Gamma_R} g(z)\,dz$

$$(*) \quad = \int_{-R}^{R} \underbrace{\frac{e^{2ix} - 1 - 2ix}{x^2}}_{g(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{e^{2i(R\cos t + iR\sin t)} - 1 - 2iRe^{it}}{R^2 e^{2it}}\, iRe^{it}}_{g(Re^{it})\, iRe^{it}}\,dt$$

$$g(x) = -2\frac{\sin^2 x}{x^2} + i2\,\frac{\sin x \cos x - x}{x^2}$$

Mit a) gilt: $\int_{-R}^{R} g(x)\,dx = -2\int_{-R}^{R} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$. (1)

$$\int_0^{\pi} g(Re^{it})\, iRe^{it}\,dt = \underbrace{\frac{i}{R}\int_0^{\pi} \underbrace{e^{-it} e^{2iR\cos t}}_{|\cdot| = 1} \underbrace{e^{-2R\sin t}}_{\le 1}\,dt}_{\to 0 \ (R \to \infty)} - \underbrace{\frac{i}{R}\int_0^{\pi} e^{-it}\,dt}_{\to 0 \ (R \to \infty)}$$

$$+ 2\int_0^{\pi} dt \quad (2)$$

Setze (1), (2) in (*) ein und bilde $R \to \infty$ und verwende (1):

$$0 = -2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx + 2\pi$$

$$\curvearrowright \quad \underline{\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ existiert, da der Integrand für $x \neq 0$ stetig ist und etwa $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ durch $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ majorisiert wird.

Lösung Aufgabe 3

Geht man für $x > 0$ mit dem Ansatz $u(x) = x^s$ in die homogene DGl

$$Ly(x) = x^2 y'' + x(1+x^2)y' - (1-x^2)y = 0 \quad (x>0) \quad (1)$$

ein, so erhält man die Bedingung an s:

$$x^s (s-1)(s+1) + x^{s+2}(s+1) = 0 \quad (x>0)$$

$$\curvearrowright \quad s = \underline{-1}$$

Eine Lösung der homogenen Gleichung ist $u(x) = x^{-1}$!

Die allgemeine Lösung der Gleichung $Ly(x) = 2x^3$ erhält man mit dem Ansatz $y(x) = u(x)w(x) = \frac{1}{x}w(x)$.

Es ist $L\left(\frac{1}{x}w(x)\right) = w'(x)(x^2-1) + w''(x)\,x \overset{!}{=} 2x^3$

Dies ist eine lineare inhomogene Gleichung 1. Ordnung für $w'(x)$:

$$\curvearrowright \quad w'(x) = 2x + c_1 x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\curvearrowright \quad w(x) = x^2 - c_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ konst beliebig})$$

und damit hat man die gesuchte allgemeine Lösung von $Ly(x) = 2x^3$:

$$\underline{y(x) = x - c_1 \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{c_2}{x}, \quad x > 0} \quad (c_1, c_2 \text{ konst beliebig})$$

Lösung Aufgabe 4

(I) $(1-y^2)y'' + y y'^2 = 0$.

Wir suchen $p = p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, so, dass für die Lösungen y von (I) $y' = p(y)$ gilt. Dieser Ansatz liefert für p die DGl 1. Ordnung:

$$(1-t^2)p(t)\dot{p}(t) + t\,p^2(t) = 0$$

1. $p(t) = 0 \quad \forall t \to y' = p(y) = 0 \to \underline{y(x) = c,\ \forall x}$, $\underline{c \text{ konst beliebig}}$ } (1)

oder 2. $(1-t^2)\dot{p}(t) + t\,p(t) = 0 \qquad (t \neq \pm 1)$

$$\to \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \frac{t}{t^2-1} \to \ln|p(t)| = \ln c\sqrt{|t^2-1|},\ c>0 \text{ konst.}$$

$$\to \pm p(t) = c_1\sqrt{|t^2-1|}, \quad c_1 \in \mathbb{R}\ (c_1 = 0 \text{ sicherlich})$$

$$= \begin{cases} c_1\sqrt{t^2-1}, & |t|>1 \\ c_1\sqrt{1-t^2}, & |t|<1 \end{cases}$$

2.1 $\to \pm y'(x) = c_1\sqrt{y^2-1} \to \operatorname{ar}\cosh(\pm y(x)) = c_1 x + c_2$

oder $\underline{y(x) = \pm\cosh(c_1 x + c_2),\ c_1, c_2 \text{ konst}}$, $x \in \mathbb{R}$ (2)

2.2 $\to \pm y'(x) = c_1\sqrt{1-y^2} \to \arcsin(\pm y(x)) = c_1 x + c_2$

oder $\underline{y(x) = \sin(c_1 x + c_2),\ c_1, c_2 \text{ konst}}$, $x \in \mathbb{R}$ (3)

Durch (1), (2), (3) sind alle Lösungen von (I) gegeben.

Die Bedingungen $y(1) = 1$, $y(2) = 5/3$ sind, wenn überhaupt, nur von (2) mit + erfüllbar:

$$y(x) = \cosh(c_1 x + c_2)$$

$y(1) = 1 \to c_1 = -c_2$: $y(x) = \cosh(c_1(x-1))$

$y(2) = 5/3 \to 5/3 = \cosh c_1 \to c_1 = \pm\ln 3$

$\to$ (cosh ist eine gerade Funktion)

$$\underline{y(x) = \cosh((\ln 3)(x-1)),\ x \in \mathbb{R}}$$