UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2002
15.3.2001

Lösung zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** w ist gegeben durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist w^2 durch die Matrix $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Also ist

$$w^2 \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \frac{z - \sqrt{3}}{\sqrt{3}z + 1}$$

(Einfaches Einsetzen hätte es auch getan).

b) Drei Punkte auf dem Rand von K_1 sind z.B.:

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} - i\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

In positiv orientierter Reihenfolge: $z_1 \to z_3 \to z_2$.
Die Bildpunkte:

$$w(z_1) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w(z_2) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{-1 - 2i + 1} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2i}{\sqrt{3}}}{-2i} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{2}{\sqrt{3}},$$
$$w(z_3) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - i\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{(analoge Rechnung zu } w(z_2)\text{)}.$$

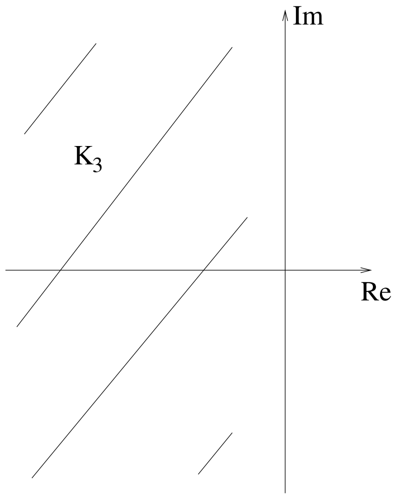
In positiv orientierte Reihenfolge: $w(z_1) \to w(z_2) \to w(z_3)$. Die Orientierung hat sich umgekehrt, also gilt $w(K_1) = K_2$.

c) Bilde weiter ab:

$$w^2(z_1) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{0} = \infty, \quad w^2(z_2) = \frac{i}{\sqrt{3}}, \quad w^2(z_3) = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

In positiv orientierter Reihenfolge: $w^2(z_1) \to w^2(z_2) \to w^2(z_3)$. Auch hier Orientierungsumkehr, also ist $w^2(K_1)$ die linke Halbebene.

Skizze:



d) Offenbar leistet $v := w^{-1}$ das Gewünschte:

$$w^{-1}(K_3) = w^{-1} \circ w^2(K_1) = w(K_1) = K_2,$$

und v läßt sich leicht ausrechnen. Wir aber rechnen schnell nach

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} .$$

Also ist $w^3 = \mathrm{id}$, und es folgt $v = w^2$.

Aufgabe 2 **a)** Es gilt

$$\left.\frac{fh}{(gh)'}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{fh}{g'h+gh'}\right|_{z=z_0} \overset{g(z_0)=0}{=} \left.\frac{fh}{g'h}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{f}{g'}\right|_{z=z_0} \overset{z_0 \text{ einf. NSt. von } g}{=} \operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right).$$

b) Mit $g(z) = z^4+z^3+z^2+z+1$ und $h(z) = z-1$ folgt $gh = z^5-1$ (der Hinweis bringt uns auf diese Idee). Wir erkennen: Die Nullstelle von h ist 1, und die Nullstellen von g sind die restlichen vier der fünften Einheitswurzeln. Von diesen liegen genau zwei in G_R. Nämlich

$$\zeta = e^{2\pi i/5} \quad \text{und} \quad \zeta^2 = e^{4\pi i/5}.$$

Da es sich um lauter einfache Nullstellen von g handelt (es sind ja einfache Nullstellen von z^5-1, einem Polynom dessen Ableitung $5z^4$ in den fünften Einheitswurzeln nicht verschwindet), dürfen wir a) verwenden:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} \frac{dz}{g(z)} &= 2\pi i\cdot(\operatorname{Res}(g^{-1};\zeta)+\operatorname{Res}(g^{-1},\zeta^2)) = 2\pi i\cdot\left(\left.\frac{h}{(gh)'}\right|_{z=\zeta} + \left.\frac{h}{(gh)'}\right|_{z=\zeta^2}\right)\\
&= 2\pi i\cdot\left(\frac{\zeta-1}{5\zeta^4}+\frac{\zeta^2-1}{5\zeta^8}\right) = 2\pi i\cdot\frac{\zeta^5-\zeta^4+\zeta^2-1}{5\zeta^8} \overset{\zeta^5=1}{=} 2\pi i\cdot\frac{-\zeta^4+\zeta^2}{5\zeta^3}\\
&= 2\pi i\cdot\frac{-\zeta+\zeta^{-1}}{5} = -2\pi i\cdot\frac{e^{2\pi i/5}-e^{-2\pi i/5}}{2i}\cdot\frac{2i}{5} = \frac{4}{5}\sin\frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}$$

c) Parametrisieren wir den Kreisbogen:

$$\kappa_R\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C},\ t\mapsto Re^{it},$$

so haben wir zu berechnen:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\kappa_R}\frac{dz}{g(z)} = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\underbrace{\frac{iRe^{it}}{g(e^it)}}_{=:\Phi_R(t)}\,dt.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\kappa_R}\frac{dz}{g(z)}\right| &\le 2\pi R\cdot\max_{t\in[0,2\pi]}|\Phi_R(t)| = 2\pi R\cdot\max_{t\in[0,2\pi]}\left|\Phi_R(t)\cdot\frac{h(Re^{it})}{h(Re^{it})}\right|\\
&= 2\pi R\cdot\max_{t\in[0,2\pi]} R\left|\frac{Re^{it}-1}{R^5e^{5it}-1}\right| \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{g(z)} = \frac{4}{5}\sin\frac{2\pi}{5}.$$

Aufgabe 3 Es gilt

$$\underbrace{y(\ln xy+1)}_{=:P(x,y)}\,dx+\underbrace{x(\ln xy-1)}_{=:Q(x,y)}\,dy=0 \quad \text{mit} \quad P_y=\ln xy+2\neq \ln xy=Q_x\,.$$

Suche einen integrierenden Faktor der Form $\mu(xy)=\varphi(t)$ mit $t=xy$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \mu_x=y\dot\varphi,\ \mu_y=x\dot\varphi\\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}(y\mu(\ln xy+1))=\frac{\partial}{\partial x}(x\mu(\ln xy-1))\\
&\Rightarrow \quad \mu(\ln xy+1)+y\mu_y(\ln xy+1)+\mu=\mu(\ln xy-1)+x\mu_x+\mu\\
&\Rightarrow \quad \varphi\ln t+\varphi+t\dot\varphi(\ln t+1)=\varphi\ln t-\varphi+t\dot\varphi(\ln t-1)\\
&\Rightarrow \quad t\dot\varphi=-\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi(t)=\frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \mu(xy)=\frac{1}{xy}\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{x}(\ln xy+1)\,dx+\frac{1}{y}(\ln xy-1)\,dy=0 \quad \text{ist exakt.}
\end{aligned}$$

Stammfunktion $F(x,y)$ für $x,y>0$:

$$\begin{aligned}
&F_x=\frac{1}{x}\ln xy+\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x,y)=\frac{1}{2}\ln^2 xy+\ln x+H(y)\\
&\quad\Rightarrow \quad F_y=\frac{1}{y}\ln xy+H'(y)\overset{!}{=}\frac{1}{y}\ln xy-\frac{1}{y}\\
&\quad\Rightarrow \quad H(y)=-\ln y+c \quad \Rightarrow \quad F(x,y)=\frac{1}{2}\ln^2 xy+\ln x-\ln y+c\,.
\end{aligned}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung für $x,y>0$

$$\frac{1}{2}\ln^2 xy+\ln x-\ln y=C \quad (C\in\mathbb{R}).$$

Aufgabe 4 **a)** Normierung: $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{x^2+2}{x^2}y = 0$.
Der Koeffizient vor y' hat einen einfachen Pol, der Koeffizient vor y einen doppelten Pol in $x = 0$.

Verallg. Potenzreihenansatz:

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+\rho}, \quad y' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+\rho) c_j x^{j+\rho-1}, \quad y'' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+\rho)(j+\rho-1) c_j x^{j+\rho-2}$$

ergibt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty}(j+\rho)(j+\rho-1)c_j x^{j+\rho} - 2\sum_{j=0}^{\infty}(j+\rho)c_j x^{j+\rho} + (x^2+2)\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+\rho} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}((j+\rho)(j+\rho-3)+2)c_j x^{j+\rho} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+\rho+2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}((j+\rho)(j+\rho-3)+2)c_j x^{j+\rho} + \sum_{j=2}^{\infty} c_(j-2) x^{j+\rho} = 0 \end{aligned}$$

$j = 0$ liefert für $c_0 \neq 0$ die determinierende Gleichung

$$\rho(\rho-3) + 2 = \rho^2 - 3\rho + 2 = 0 \quad \text{mit den Wurzeln} \quad \rho_1 = 2,\ \rho_2 = 1.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} y_1 = xu \quad &\Rightarrow \quad y_1' = u + xu',\ y_1'' = 2u' + xu'' \\ &\Rightarrow \quad x^2(2u' + u'') - 2x(u + xu') + (x^2+2)xu = x^3(u'' + u) = 0 \\ &\overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \quad u'' + u = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \end{aligned}$$

Die allgemiene Lösung der hom. DGl. lautet somit

$$y(x) = C_1 x \cos x + C_2 x \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung y_1 mit $y_1'(0) = 0$, $y_1''(0) = 2$ berechnet sich am schnellsten aus der Potenzreihenentwicklung

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 x(1 - x^2/2! - + \ldots) + C_2 x(x - x^3/3! + - \ldots) \\ &= C_1 x + C_2 x^2 + \text{höhere Potenzen von } x \end{aligned}$$

Somit

$$y'(x) = C_1 + 2C_2 x + \text{höhere Potenzen von } x, \quad y''(x) = 2C_2 + \text{höhere Potenzen von } x.$$

Die Anfangsbedingung liefert $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Also ist $y_1(x) = x \sin x$.

c) Da $y_p(x) = x$ eine Lösung der inhomogenen DGl. ist, folgt sofort, dass die allg. Lsg. lautet:

$$y(x) = C_1 x \cos x + C_2 x \sin x + x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$