Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P.C. Kunstmann

Frühjahr 2011
28.02.2011

Bachelor–Modulprüfung bzw. Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 $\quad$ **(5 + (2 + 3) = 10 Punkte)**

a) Berechnen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem von

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}\,.$$

b) Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu b): Eine Bearbeitung von Aufgabenteil ii) ist auch ohne das Ergebnis aus i) möglich, in diesem Fall aber eventuell aufwendiger.

Aufgabe 2 $\quad$ **(5 + 5 = 10 Punkte)**

a) Betrachten Sie folgendes Anfangswertproblem in $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y > 0\}$

$$(xy^2 - y)\,dx + x^2y\,dy = 0\,, \qquad y(1) = 1\,.$$

Berechnen Sie die Lösung und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.
Hinweis: Es gibt einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \rho(xy)$.

b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 3)y = 0\,.$$

Hinweis: Man rechne zunächst nach, dass $y_1(x) = e^{x^2 - x}$ die Differentialgleichung löst.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Lösen Sie mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$y'' - 2xy' - 6y = 2e^{x^2}\,, \qquad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,.$$

Geben Sie dabei eine Darstellung der Lösung in geschlossener Form an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0\}$. Betrachten Sie folgende Differentialgleichung in D:

$$x\,\partial_x u + 2y\,\partial_y u = \frac{2}{3}\,u \ln\Big(\frac{y^2}{x}\Big)\,.$$

Berechnen Sie eine Lösung $u = u(x,y)$ dieser Differentialgleichung, die der Bedingung

$$u(\xi, \sqrt{\xi}) = 1 \qquad \text{für alle } \xi > 0$$

genügt. Wie sehen die Grundcharakteristiken aus?

Skizzieren Sie in der (x,y)-Ebene die Kurve Γ, auf der die Anfangswerte vorgegeben sind, sowie einige Grundcharakteristiken (d.h. in etwa drei).

Überprüfen Sie, ob Ihre Berechnung tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung geliefert hat.

Auf welcher Teilmenge von D ist die von Ihnen berechnete Lösung erklärt?

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 23.03.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 13.04.2011, von 14:00 bis 16:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 18.04.2011 bis 21.04.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.