Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P.C. Kunstmann

Frühjahr 2011
28.02.2011

**Bachelor–Modulprüfung bzw. Diplom–Vorprüfung**

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Lösungsvorschläge**

**Aufgabe 1**

**a)** Die Matrix des Systems werde mit $A$ bezeichnet. Wegen

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(3+\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -(3+\lambda)\big((1-\lambda)^2+1\big) = -(3+\lambda)(1+i-\lambda)(1-i-\lambda)$$

sind $-3$ und $1\pm i$ die Eigenwerte von $A$. Der Eigenraum von $A$ zum Eigenwert $-3$ lautet

$$\mathrm{Kern}(A+3I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Dies liefert eine Fundamentallösung von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zum (nicht-reellen) Eigenwert $1+i$ gehört der Eigenraum

$$\mathrm{Kern}(A-(1+i)I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -4-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}\},$$

so dass eine komplexe Lösung des Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ durch

$$e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil liefert dann die zwei reellen Lösungen

$$\vec{\phi}_2(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad \vec{\phi}_3(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

und ein reelles Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ ist bestimmt, nämlich $\vec{\phi}_1(t)$, $\vec{\phi}_2(t)$, $\vec{\phi}_3(t)$ bzw.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t\cos t & e^t\sin t \\ 0 & -e^t\sin t & e^t\cos t \end{pmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

**b) i)** Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2A\,, \qquad A^3 = A^2 A = 2AA = 2A^2 = 2^2 A\,.$$

Wir vermuten $A^k = 2^{k-1}A$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was wir mittels vollständiger Induktion bestätigen. Der Induktionsanfang ist bereits gemacht. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Gilt $A^k = 2^{k-1}A$ (IV) für dieses $k$, dann folgt

$$A^{k+1} = A^k A \overset{\text{IV}}{=} 2^{k-1}AA = 2^{k-1}A^2 = 2^{k-1}2A = 2^k A\,.$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist somit

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2^{k-1} A \\ &= I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} A = I + \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)A = \begin{pmatrix} 1 + 3\frac{e^{2t}-1}{2} & -3\frac{e^{2t}-1}{2} \\ \frac{e^{2t}-1}{2} & 1 - \frac{e^{2t}-1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**b) ii)** Die Lösung des Anfangswertproblems $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist gemäß der Variation-der-Konstanten-Formel aus Kapitel 3.5 gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\, ds\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

mit $t_0 = 0$, $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} =: \vec{b}$. Mit dem Ergebnis aus i) erhält man für jedes $t \in \mathbb{R}$ unter Verwendung der Substitution $\widetilde{s} = t - s$, $d\widetilde{s} = -ds$

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}\, ds = e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{\widetilde{s}A}\vec{b}\, d\widetilde{s} \\ &= e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t \big(I + \frac{1}{2}(e^{2\widetilde{s}} - 1)A\big)\vec{b}\, d\widetilde{s} \\ &= e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t \vec{b} + \frac{1}{2}(e^{2\widetilde{s}} - 1)A\vec{b}\, d\widetilde{s} \\ &= e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t ds\, \vec{b} + \frac{1}{2}\int_0^t (e^{2\widetilde{s}} - 1)\, d\widetilde{s}\, A\vec{b} \\ &= e^{tA}\vec{y}_0 + t\vec{b} + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}e^{2\widetilde{s}} - \widetilde{s}\Big]_{\widetilde{s}=0}^{\widetilde{s}=t} A\vec{b} \\ &= e^{tA}\vec{y}_0 + t\vec{b} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2}\Big)A\vec{b} \\ &= \begin{pmatrix} -3\frac{e^{2t}-1}{2} \\ 1 - \frac{e^{2t}-1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix} + \Big(\frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\Big)\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ 1 + t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Kennt man $e^{tA}$ nicht, so kann man die Variation-der-Konstanten-Formel aus Kapitel 3.1 verwenden. In diesem Fall entsteht zusätzlicher Aufwand bei der Berechnung des Fundamentalsystems $\Phi$ und seiner Inversen $\Phi(\tau)^{-1}$ und $\Phi(0)^{-1}$, sowie bei den entsprechenden Matrixmultiplikationen.

## Aufgabe 2

**a)** Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ mit

$$P(x, y) := xy^2 - y\,, \qquad Q(x, y) := x^2 y\,.$$

Offenbar sind $P, Q\colon D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Damit $\mu$ ein integrierender Faktor für die Differentialgleichung $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ ist, muss $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gelten, also

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \qquad \text{bzw.} \qquad \mu(P_y - Q_x) = \mu_x Q - \mu_y P\,. \tag{$*$}$$

Für $\mu = \rho(xy)$ gilt $\mu_x = y\rho'(xy)$ und $\mu_y = x\rho'(xy)$. Wegen

$$P_y(x,y) - Q_x(x,y) = 2xy - 1 - 2xy = -1$$

besagt die Gleichung $(*)$

$$-\rho(xy) = \rho'(xy)\big(y\,x^2y - x(xy^2 - y)\big) = xy\rho'(xy)\,.$$

Für $(x,y) \in D$ setzen wir $t := xy$. Dann ist $t > 0$ und Division durch $-t$ führt auf

$$\rho'(t) = -\frac{1}{t}\,\rho(t)\,.$$

Eine Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung ist $\rho(t) = 1/t$. Damit wissen wir:

$$\mu = \rho(t) = \frac{1}{t} = \frac{1}{xy}$$

ist auf $D$ ein integrierender Faktor. Wir betrachten die exakte Differentialgleichung, die sich aus der ursprünglichen Gleichung durch Multiplikation mit $\mu$ ergibt, also

$$\Big(y - \frac{1}{x}\Big)\,dx + x\,dy = 0\,,$$

und bestimmen eine zugehörige Stammfunktion $F\colon D \to \mathbb{R}$. Aus $F_y(x,y) = x$ folgt

$$F(x,y) = xy + c(x)$$

mit einer gewissen Funktion $c$. Damit erhalten wir

$$F_x(x,y) = y + c'(x) \stackrel{!}{=} y - \frac{1}{x}\,,$$

also $c'(x) = -\frac{1}{x}$. Wir wählen $c(x) = -\ln x$ und haben eine Stammfunktion der Differentialgleichung gefunden, nämlich $F(x,y) = xy - \ln x$. Alle Lösungen sind dann implizit gegeben durch

$$xy - \ln x = C \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Wegen $F(1,1) = 1$ ergibt sich für die Lösung des Anfangswertproblems $xy - \ln x = 1$, so dass

$$y(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

folgt. Zur Bestimmung des maximalen Existenzintervalls der Lösung muss man untersuchen, für welche $x > 0$ der Ausdruck $y(x)$ definiert ist und $(x, y(x)) \in D$ gilt. Ersteres ist offenbar für alle $x > 0$ der Fall. Überdies gilt $y(x) > 0$ genau dann, wenn $x > e^{-1}$ ist. Damit ist $(e^{-1}, \infty)$ das maximale Existenzintervall der Lösung.

**b)** Ist $y_1(x) = e^{x^2 - x}$, $x \in \mathbb{R}$, gesetzt, dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$y_1'(x) = (2x-1)e^{x^2-x} \quad \text{und} \quad y_1''(x) = 2e^{x^2-x} + (2x-1)^2 e^{x^2-x} = (4x^2 - 4x + 3)e^{x^2-x}\,.$$

Daher folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$y_1''(x) - 4xy_1'(x) + (4x^2 - 3)y_1(x) = (4x^2 - 4x + 3 - 8x^2 + 4x + 4x^2 - 3)e^{x^2-x} = 0\,,$$

so dass $y_1$ tatsächlich die gegebene Differentialgleichung löst. Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung 2. Ordnung kann nach dem Reduktionsverfahren von d'Alembert mit dem Ansatz $y(x) = y_1(x)v(x)$ gewonnen werden. Wegen

$$y' = y_1'v + y_1v'\,, \qquad y'' = y_1''v + 2y_1'v' + y_1v''$$

führt dieser Ansatz auf die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&y_1''v + 2y_1'v' + y_1v'' - 4x(y_1'v + y_1v') + (4x^2 - 3)y_1v = 0\,, \\
\text{also} \quad &\big(y_1'' - 4xy_1' + (4x^2 - 3)y_1\big)v + (2y_1' - 4xy_1)v' + y_1v'' = 0\,.
\end{aligned}
$$

Da $y_1$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, hat der Ausdruck in der Klammer den Wert 0; die Gleichung für $v$ lautet damit

$$(2y_1' - 4xy_1)v' + y_1v'' = 0\,, \qquad \text{d.h.} \qquad -2e^{x^2-x}v' + e^{x^2-x}v'' = 0\,.$$

Für $w := v'$ haben wir folglich die Differentialgleichung

$$-2w + w' = 0\,, \qquad \text{also} \qquad w' = 2w\,.$$

Diese homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die allgemeine Lösung

$$u(x) = ce^{2x} \qquad (c \in \mathbb{R})\,.$$

Für die Funktion $v$ bedeutet das

$$v(x) = Ce^{2x} + D \qquad (C, D \in \mathbb{R})\,.$$

Daher ergibt sich für die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung

$$y(x) = y_1(x)v(x) = e^{x^2-x}(Ce^{2x} + D) = Ce^{x^2+x} + De^{x^2-x} \qquad (C, D \in \mathbb{R})\,.$$

**Aufgabe 3**

Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,,$$

wobei $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, zu bestimmende Koeffizienten sind, führt auf

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}\,.$$

Wegen der Anfangsbedingungen ist $c_0 = y(0) = 0$ und $c_1 = y'(0) = 0$. Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$
\begin{aligned}
y''(x) - 2xy'(x) - 6y(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n}_{=\sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n} - \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n+6)c_n\big]x^n\,.
\end{aligned}
$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht

$$2e^{x^2} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k!}\,x^{2k}\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n+6)c_n = \begin{cases} \frac{2}{k!}\,, & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0\,, \\ 0\,, & \text{falls } n = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0\,. \end{cases}$$

Aus der zweiten Zeile lesen wir wegen $c_1 = 0$ unmittelbar $c_3 = c_5 = \ldots = 0$ ab, also $c_n = 0$ für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$.

Nach der ersten Zeile gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$(2k+2)(2k+1)c_{2k+2} - (4k+6)c_{2k} = \frac{2}{k!}\,, \quad \text{d.h.} \quad c_{2k+2} = \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\Big(\frac{2}{k!} + (4k+6)c_{2k}\Big)\,.$$

Wegen $c_0 = 0$ ergeben sich dann die Werte

$$\begin{aligned}
k=0: &\qquad c_2 = \frac{1}{2\cdot 1}\Big(2+0\Big) = 1 = \frac{1}{0!}\,,\\
k=1: &\qquad c_4 = \frac{1}{4\cdot 3}\Big(2+10\cdot 1\Big) = 1 = \frac{1}{1!}\,,\\
k=2: &\qquad c_6 = \frac{1}{6\cdot 5}\Big(\frac{2}{2}+14\cdot 1\Big) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}\,,\\
k=3: &\qquad c_8 = \frac{1}{8\cdot 7}\Big(\frac{2}{6}+18\cdot \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}\,,
\end{aligned}$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2k} = \frac{1}{(k-1)!} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,,$$

welche wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N}$. Gilt die Formel $c_{2k} = \frac{1}{(k-1)!}$ für dieses $k$ (IV), so folgt nach der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
c_{2(k+1)} &= \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\Big(\frac{2}{k!} + (4k+6)c_{2k}\Big)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\Big(\frac{2}{k!} + (4k+6)\frac{1}{(k-1)!}\Big)\\
&= \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\,\frac{1}{k!}\,\Big(2 + (4k+6)k\Big)\\
&= \frac{1}{4k^2+6k+2}\,\frac{1}{k!}\,\Big(4k^2+6k+2\Big) = \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1-1)!}\,.
\end{aligned}$$

Wir fassen die gefundenen Ergebnisse zusammen

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!}\,, & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\,,\\ 0\,, & \text{falls } n = 0 \text{ oder } n = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0\,. \end{cases}$$

Damit haben wir die Lösung des Anfangswertproblems ermittelt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\,x^{2k} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\,x^{2l+2} = x^2 e^{x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

**Aufgabe 4**

Das charakteristische System der gegebenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned}
k_1'(s) &= k_1(s)\,,\\
k_2'(s) &= 2k_2(s)\,,\\
w'(s) &= \frac{2}{3}\,w(s)\ln\Big(\frac{k_2(s)^2}{k_1(s)}\Big)\,.
\end{aligned}$$

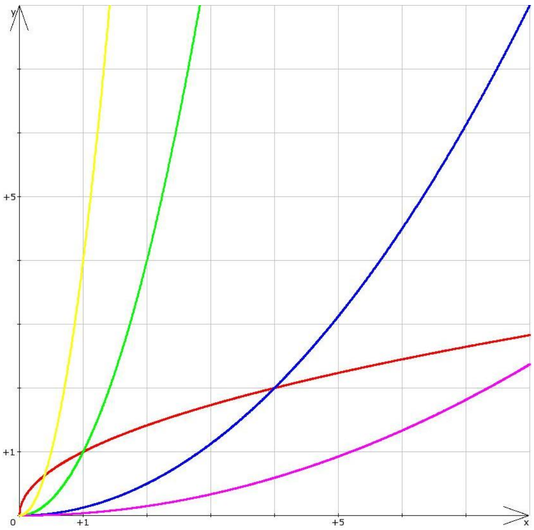
Auf der Kurve $\Gamma = \{(\xi, \sqrt{\xi}) \,:\, \xi > 0\}$ sind die Anfangswerte vorgegeben und zu festem $\xi > 0$ lauten die Anfangswerte für das charakteristische System

$$\begin{aligned}
k_1(0) &= \xi\,,\\
k_2(0) &= \sqrt{\xi}\,,\\
w(0) &= 1\,.
\end{aligned}$$

Für festes $\xi > 0$ erhält man $k_1(s) = \xi e^s$ und $k_2(s) = \sqrt{\xi} e^{2s}$ als eindeutige Lösungen der ersten beiden Gleichungen des charakteristischen Systems.

Wir bemerken, dass $k_1^2(s) = \xi^2 e^{2s} = \xi^{3/2}\xi^{1/2}e^{2s} = \xi^{3/2}k_2(s)$ gilt, d.h. $k_2(s) = \xi^{-3/2}k_1(s)$ oder $y = \xi^{-3/2}x$, sofern $x = k_1(s), y = k_2(s)$ gesetzt sind.

Skizze (rot: $\Gamma$, gelb: $\xi = 1/4$, grün: $\xi = 1$, blau: $\xi = 4$, lila: $\xi = 9$):




Sei $(x, y) \in D$. Dann ist $k_1(s) = x$, $k_2(s) = y$ genau dann erfüllt, wenn

$$\xi = \left(\frac{x^2}{y}\right)^{2/3} \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{x} = e^{3s}$$

bzw.

$$\xi = \left(\frac{x^2}{y}\right)^{2/3} \quad \text{und} \quad s = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

gilt. Da das Anfangswertproblem

$$w'(s) = 2sw(s), \quad w(0) = 1$$

die Lösung $w(s) = e^{s^2}$ besitzt, erhält man als Kandidaten für eine Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$u(x, y) = \exp\left(\frac{1}{9}\left(\ln\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)^2\right),$$

welcher für jedes $(x, y) \in D$ definiert ist.

Probe: Aus

$$\partial_x u(x, y) = u(x, y)\,\frac{2}{9}\,\ln\left(\frac{y^2}{x}\right)\frac{-1}{x}$$

und

$$\partial_y u(x, y) = u(x, y)\,\frac{2}{9}\,\ln\left(\frac{y^2}{x}\right)\frac{2}{y}$$

folgt für alle $(x, y) \in D$

$$x\partial_x u(x, y) + 2y\partial_y u(x, y) = -\frac{2}{9}\,u(x, y)\ln\left(\frac{y^2}{x}\right) + \frac{8}{9}\,u(x, y)\ln\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{2}{3}\,u(x, y)\,\ln\left(\frac{y^2}{x}\right),$$

d.h. $u$ löst tatsächlich die gegebene partielle Differentialgleichung. Außerdem ist

$$u(\xi, \sqrt{\xi}) = \exp\left(\frac{1}{9}(\ln 1)^2\right) = 1$$

für jedes $\xi > 0$ erfüllt.