Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann Frühjahr 2013

Klausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 sind $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Die Eigenvektoren sind

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Die komplexe Lösung des homogenen Systems ist

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it}.$$

Wir bekommen zwei linearunanhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

$$U_{\text{allg,h}} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

$$U_{\text{inh,p}} = c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Nach Substitation in die Gleichung bekommen wir

$$c_1'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2'(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan^2 t - 1 \\ \tan t \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = \tan^2 t - 1 \\ c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = \tan t \end{cases}$$

$$c_2'(t)\sin^2 t + c_2'(t)\cos^2 t = \tan^2 t \cdot \sin t - \sin t + \sin t c_2'(t) = \tan^2 t \cdot \sin t \Longrightarrow$$

$$c_2 = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = \int -\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} d(\cos t) =$$

$$= \int \frac{-\sin^2 t - \cos^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} d(\cos t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t$$

$$-c_1' \sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} \cdot \cos t = \frac{\sin t}{\cos t} \Longrightarrow -c_1' = \frac{1}{\cos t} - \frac{\sin^2 t}{\cos t} \Longrightarrow -c_1' = \frac{\cos^2 t}{\cos t} = \cos t \Longrightarrow c_1 = -\sin t.$$

Die allgemeine Lösung des Systems lautet:

$$U_{\text{allg,inh}} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ -\sin^2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tan t + \sin t \cos t \\ 1 + \cos^2 t \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tan t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ mit

$$P(x,y) = \frac{1}{y} + y \sin 2x \quad , \quad Q(x,y) = -2\cos^2 x.$$

Offenbar sind P, Q in eine Umgebung von $(0,1)$ stetigdifferenzierbar. Die Differentialgleichung ist nicht exakt, denn es gilt

$$P_y(x,y) = -\frac{1}{y^2} + \sin x \quad \neq \quad Q_x(x,y) = 4\cos x \sin x.$$

Wir suchen einen intergrierenden Faktor $\mu = \mu(y)$. Für $\mu = \mu(y)$ soll $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gelten, also

$$\mu' \left(\frac{1}{y} + y \sin 2x \right) - \frac{\mu}{y^2} + \mu \sin 2x = \mu\ 4\cos x \sin x = \mu\ 2 \sin 2x \Longrightarrow$$

$$\frac{\mu'}{y} - \frac{\mu}{y^2} = -\mu'(y) \cdot y \sin 2x + \mu \sin 2x.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist von x unabhängig. Daraus folgt, dass

$$\mu - \mu' \cdot y = 0 \Longrightarrow \mu y = Cy.$$

Wir nehmen $\mu(y) = y$ als integrierenden Faktor und bekommen die exakte Differentialgleichung

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0 \Longleftrightarrow dx - d(y^2 \cos^2 x) = 0$$

$$c + x - y^2 \cos^2 x = 0 \qquad y = \pm \sqrt{\frac{c+x}{\cos^2 x}}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt, dass

$$y = \frac{\sqrt{1+x}}{\cos x} \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{gilt.}$$

b) Diese Eulersche DGL behandeln wir, indem wir die neue Variable $t = \ln x$ einführen. Die Gleichung wird dann wegen $x = e^t$ zu

$$e^{2t} y''(e^t) + 4e^t y'(e^t) + 2y(e^t) = 8e^{3t}$$

Mit $u(t) := y(e^t)$ haben wir $u'(t) = e^t y'(e^t)$ und $u''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$.
Unsere Gleichung lautet somit

$$u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 8e^{3t} \tag{1}$$

Da das charakteristische Polynom, der zugehörigen homogenen Gleichung $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ die einfachen Null-stellen -2 und -1 hat, ist die allgemeine Lösung der Gleichung

$$u''(t) + 3u'(t) + 2u(t)$$

$$u_{\text{allg,h}} = C_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

Eine specielle Lösung der inhomogenen Gleichung suchen wir als $u_{\text{sp.}} = ce^{3t}$. Wir bekommen

$$9ce^{3t} + 9ce^{3t} + 2ce^{3t} = 8ce^{3t} \Longrightarrow c = \frac{2}{5}.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (1) ist

$$u_{\text{allg}} = \frac{2}{5}e^{3t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}.$$

Damit bekommen wir, dass

$$y(x) = \frac{2}{5}x^3 + c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1} \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 3

a) Es handelt sich um eine Bernoulische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung, die die Anfangsbedingungung nicht erfüllt. Nach der Substitution $z = u^{-1}$ bekommen wir eine lineare Differentialgleichung,

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{z} + 2x\frac{1}{z^2} = 0 \Longleftrightarrow z' - \frac{x}{1+x^2}z = 2x$$

Die zugehörige homogene DGL

$$z' + \frac{x}{1+x^2}z = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{x}{1+x^2}dx \Longleftrightarrow \ln z + \ln c = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$z_{\text{allg}} = c(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden verwenden wir den Ansatz

$$z_{\text{inh}} = c(x)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dann gilt

$$c'(x)(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 2x \Longrightarrow c(x) = 2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow z_{\text{inh}} = 2(1+x^2).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$z_{\text{allg,inh}} = 2(1+x^2) + c(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Aus der Anfangsbedingung bekommen wir

$$z(0) = \frac{1}{y(0)} = 2 \Longrightarrow 2 \cdot 1 + c \cdot 1 = 2 \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

b) Es handelt sich um eine Riccatische Differentialgleichung. Mit dem Ansatz $u(x) = y(x) - x$ bekommen wir

$$xu' - u + u^2 = 0 \tag{2}$$

Die Gleichung (2) ist eine Gleichung mit getrennten Variablen, die einen Lösung $u = 1$ hat. Die Lösung $y = 1 + x$ erfüllt die Anfangsbedingung.

Aufgabe 4

Wir betrachten die eindimensionale Wärmegleichung mit den Randbedingungen $u(t,0) = u'_x(t,1) = 0$ für $t > 0$ und machen den Ansatz $u_k(t,x) = v_k(t)u_k(x)$, $t > 0$, $x \in (0,1)$. Die Funktion $u_k(t,x)$ ist genau dann eine Lösung der Wärmegleichung, wenn ein $\lambda_k \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & v'_k = \lambda_k v_k(t) \\ \text{(b)} & w''_k(x) = \lambda_k w_k(x) \end{array}$$

gilt. Die Lösung von (a)ist $v_k(t) = v_k(0)e^{\lambda_k t}$, die allgemeine Lösung von (b) lautet $w_k(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda_k}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda_k}x}$.

Bei dem Ansatz $u_k(t,x) = v_k(t)w_k(x)$ ergibt sich für die Randbedingungen $u(t,0) = u'_x(t,1) = 0 \Longrightarrow v_k(t)w_k(0) = 0 = v_k(t)w'_k(1)$, im nichttrivialen Fall $v_k \neq 0$ also $w_k(0) = 0 = w'_k(1)$, d.h.

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} & \alpha + \beta = 0 \\ \text{(d)} & \sqrt{\lambda_k}(\alpha e^{\sqrt{\lambda_k}} - \beta e^{-\sqrt{\lambda_k}}) = 0 \end{array}$$

Setzt man (c) in (d) ein, so ergibt sich die Bedingung

$$e^{\sqrt{\lambda_k}} + e^{-\sqrt{\lambda_k}} = 0 \Longrightarrow e^{2\sqrt{\lambda_k}} = 1.$$

Wir gehen weiterhin von dem nichttrivialen Fall $\lambda_k, \alpha \neq 0$ aus. Dann folgt $\sqrt{\lambda_k} = \pi i(\frac{1}{2} + k)$. Somit ist w_k von der Gestalt $w_k = c_k \sin(k + \frac{1}{2})\pi x$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da $\sin(x) = \sin(-x)$ gilt, können wir $k \in \mathbb{N}_0$ annehmen. Damit lauten die separierte-Variablen-Lösungen

$$u_k(t,x) = c_k e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right) \qquad (t > 0, x \in [0,1])$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $c_k \in \mathbb{R}$. Offensichtlich erfüllt eine konvergente Summe

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right) \qquad (t > 0, x \in [0,1])$$

die Differentialgleichung und die Randbedingungen.

Für die Funktion $f(x)$ gilt

$$f(x) = \sin(\pi x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right].$$

Aus der Anfangsbedingung folgt, dass $c_k = \frac{1}{2}$ für $k = 0$ und $k = 1$, $c_k = 0$ für $k \neq 0; 1$ gilt. Als die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir

$$u(t,x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi^2}{4}t} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{9\pi^2}{4}t} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right).$$