KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Frühjahr 2014
06.03.2014

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

mit Hilfe eines geeigneten Potenzreihenansatzes (um $x = 0$).

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$ des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 [5+5=10 Punkte]

(a) Berechnen Sie die Lösung des folgenden Randwertproblems für $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned} 5D_1u(x,y) - 2D_2u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,0) &= 0, \\ D_1u(x,0) &= e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Finden Sie von Null verschiedene Lösungen der unviskosen Burgers-Differentialgleichung

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,t) = f(x)g(t)$.

Aufgabe 4 [3+2+3+2 = 10 Punkte]

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit $e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^t & 0 \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}$.

(b) Finden Sie eine Transformation, welche die Differentialgleichung

$$y'(x) = \sqrt{1+x^2}\, y(x) + \left(\frac{y(x)}{1+x^2}\right)^{2014}$$

in eine lineare DGL überführt und geben Sie die transformierte Gleichung an (ohne die resultierende DGL zu lösen). Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y'\sqrt{x^2 - y} = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})$$

exakt ist und geben Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $y(3) = 5$ in impliziter Form an.

(d) Geben Sie eine homogene lineare Differentialgleichung an, deren Lösungsraum von folgenden Funktionen aufgespannt wird:

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad y_3(x) = e^{-x}, \quad y_4(x) = e^{\mathrm{i}x}, \quad y_5(x) = e^{x}, \quad y_6(x) = 1.$$

VIEL ERFOLG!

HINWEISE: Die **Klausurergebnisse** können voraussichtlich ab Freitag, den 11.04.2014, am schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianzgebäude 05.20) und auf der Vorlesungswebseite

`http://www.math.kit.edu/iana1/`

eingesehen werden.

Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 16.04.2012, von 16:00 Uhr bis 18:00 Uhr im Benz-Hörsaal (Gebäude 10.21) statt.

Die **mündlichen Nachprüfungen** sind in der Woche vom 22.04.2014 bis 25.04.2014 im Allianzgebäude 05.20 (3. Obergeschoss).