KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Frühjahr 2014
06.03.2014

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

mit Hilfe eines geeigneten Potenzreihenansatzes (um $x = 0$).

Lösung: Der (gewöhnliche) Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit $y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2}$ führt eingesetzt in die Differentialgleichung auf

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k \\ &= 2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_{k-1}\right] x^k \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$2a_2 = 0 \tag{1}$$
$$a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_{k-1} = 0, \quad k \geq 1 \tag{2}$$

Aus den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ erhält man $a_0 = 1$ bzw. $a_1 = 0$.

Wegen $a_1 = 0$ folgt mit (2)

$$a_4 = 0, \quad a_7 = 0, \quad a_{10} = 0, \quad \text{allgemein} \quad a_{3m+1} = 0 \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Gleichung (1) liefert $a_2 = 0$ und damit wegen (2)

$$a_5 = 0, \quad a_8 = 0, \quad a_{11} = 0, \quad \text{allgemein} \quad a_{3m+2} = 0 \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Die Koeffizienten a_{3m}, $m \in \mathbb{N}$, erhält man aus der Rekursionsgleichung (2) zu

$$a_{3m} = \frac{a_{3m-3}}{3m(3m-1)}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
a_{3m} &= \frac{1}{3m(3m-1)} a_{3(m-1)} = \frac{1}{3m(3m-1)} \frac{1}{(3k-3)(3k-4)} a_{3(m-2)} = \cdots \\
&= \frac{1}{3m(3m-1)\,(3m-3)(3m-4)\ \cdots\ 6\cdot 5\ \cdot\ 3\cdot 2} a_0 \\
&= \frac{(3m-2)(3m-5)(3m-8)\cdots 7\cdots 4}{(3m)!}, \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

und somit

$$y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{3m} x^{3m} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{3m}}{3m(3m-1)\,(3m-3)(3m-4)\ \cdots\ 6\cdot 5\ \cdot\ 3\cdot 2}\,.$$

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$ des Anfangswertproblems

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: Bezeichne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Variante 1:

Nach Variation der Konstanten ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-\pi)A}\vec{y}(\pi) + \int_\pi^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Berechnung von e^{tA}:

$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix}$ ist eine Blockmatrix mit

$$A_1 = (2), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt wegen $EN = NE$, und $N^2 = 0$, dass

$$e^{tA_2} = e^{tE+tN} = e^{tE}e^{tN} = e^t(E + tN) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

und somit

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & e^{tA_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\int_\pi^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = e^{tA}\int_\pi^t e^{-sA}b(s)\,\mathrm{d}s = e^{tA}\int_\pi^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-s} & -2se^{-s} \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos s \\ e^s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = e^{tA}\int_\pi^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-s}\cos s - 2s \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{-\pi} - t^2 + \pi^2 \\ t - \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{-\pi} - t^2 + \pi^2 \\ t - \pi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{t-\pi} + (t-\pi)^2 e^t \\ e^t(t-\pi) \end{pmatrix},$$

wobei

$$\int_\pi^t e^{-s}\cos s\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t) - \tfrac{1}{2}e^{-\pi}$$

verwendet wurde. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\int_\pi^t e^{-s}\cos s\,\mathrm{d}s &= -e^{-s}\cos s\big|_\pi^t - \int_\pi^t e^{-s}\sin s\,\mathrm{d}s = -e^{-t}\cos t - e^{-\pi} + e^{-s}\sin s\big|_\pi^t - \int_\pi^t e^{-s}\cos s\,\mathrm{d}s\\ &= -e^{-t}\cos t - e^{-\pi} + e^{-t}\sin t - \int_\pi^t e^{-s}\cos s\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Anfangswertproblems ist daher

$$\vec{y}(t) = e^{(t-\pi)A}\vec{y}(\pi) + \int_\pi^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} e^{2(t-\pi)} \\ \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{t-\pi} + (t-\pi)^2 e^t \\ e^t(t-\pi)\end{pmatrix}.$$

Variante 2:

Die Matrix A besitzt den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v}_1 = (1,0,0)^T$ sowie den doppelten Eigenwert $\lambda_{2,3} = 1$ mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v}_2 = (0,1,0)^T$ und verallgemeinertem Eigenvektor $\vec{v}_3 = (0,2,1)^T$ mit der Eigenschaft

$$(A-E)^2\vec{v}_3 = 0, \quad (A-E)\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 \neq 0.$$

Daraus erhält man

$$e^{-t}e^{tA}\vec{v}_3 = e^{t(A-E)}\vec{v}_3 = \vec{v}_3 + t(A-E)\vec{v}_3 = \vec{v}_3 + 2t\vec{v}_2,$$

weshalb eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ des homogenen Systems gegeben ist durch

$$\Phi(t) = \left[e^{2t}\vec{v}_1, e^t\vec{v}_2, e^t(\vec{v}_3 + 2t\vec{v}_2)\right] = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & (2+2t)e^t \\ 0 & 0 & e^t\end{pmatrix},$$

mit der Eigenschaft $\Phi(0) = A$. Der Rest folgt wie in Variante 1 mit $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ oder via

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= \Phi(t-\pi)\Phi(0)^{-1}\vec{y}(\pi) + \Phi(t)\int_\pi^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s\\ &= \Phi(t)\Phi(\pi)^{-1}\vec{y}(\pi) + \Phi(t)\int_\pi^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 [5+5=10 Punkte]

(a) Berechnen Sie die Lösung des folgenden Randwertproblems für $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned} 5D_1u(x,y) - 2D_2u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,0) &= 0, \\ D_1u(x,0) &= e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Finden Sie von Null verschiedene Lösungen der unviskosen Burgers-Differentialgleichung

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,t) = f(x)g(t)$.

LÖSUNG:

(a) Die DGL ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x,y) = 0$. Definiert man neue Koordinaten (ξ, η) via

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

so gilt für $v(\xi,\eta) = u\left(A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = u(a_{11}\xi + a_{12}\eta, a_{21}\xi + a_{22}\eta)$

$$D_1v(\xi,\eta) = a_{11}D_1u(a_{11}\xi + a_{12}\eta, a_{21}\xi + a_{22}\eta) + a_{21}D_2u(a_{11}\xi + a_{12}\eta, a_{21}\xi + a_{22}\eta).$$

Setzt man $a_{11} = 5$, $a_{21} = -2$, folgt aus der Differentialgleichung für u

$$D_1v(\xi,\eta) = 0$$

und somit $v(\xi,\eta) = f(\eta)$ mit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ beliebig. Dann gilt aber

$$u(x,y) = v\left(A^{-1}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = f\left(\tfrac{1}{\det A}(-a_{21}x + a_{11}y)\right) = f\left(\tfrac{1}{\det A}(2x + 5y)\right) = g(2x + 5y),$$

$g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ beliebig.
Aus den Randbedingungen folgt $u(0,0) = g(0) = 0$ und $D_1u(x,0) = 2g'(2x) = e^x$, bzw. $g'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$. Damit ist g gegeben durch

$$g(x) = \int_0^x g'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \tfrac{1}{2}e^{\xi/2}\,\mathrm{d}\xi = e^{x/2} - 1.$$

Insgesamt hat man also $u(x,y) = g(2x + 5y) = e^{x+\frac{5}{2}y} - 1$.

(b) Man überzeugt sich leicht, dass konstante Funktionen $u(x,t) = c$, $c \in \mathbb{R}$, die Differentialgleichung lösen.

Einsetzen des Separationsansatzes $u(x,t) = f(x)g(t)$ in die partielle Differentialgleichung liefert

$$f(x)g'(t) + f(x)g(t)f'(x)g(t) = 0$$

und damit $f(x)g'(t) = -f(x)f'(x)g(t)^2$. Dividiert man durch $f(x)$ und $g(t)^2$ (da $f, g \not\equiv 0$ ist dies zumindest für solche (x, t) mit $f(x), g(t) \neq 0$ möglich), folgt

$$\frac{g'(t)}{g(t)^2} = -f'(x).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn beide Seiten konstant sind, d.h. es gibt eine Konstante $\mu \in \mathbb{R}$, sodass

$$\frac{g'(t)}{g(t)^2} = \mu, \quad -f'(x) = \mu.$$

Es folgt $-f(x) = \mu x + A$, $A \in \mathbb{R}$, und g lässt sich aus

$$\int \frac{\mathrm{d}g}{g^2} = \int \mu \, \mathrm{d}t + B, \quad B \in \mathbb{R},$$

bestimmen. Man erhält $-\frac{1}{g(t)} = \mu t + B$ und somit $g(t) = -\frac{1}{\mu t + B}$.

Insgesamt hat man

$$\begin{aligned} u(x,t) = f(x)g(t) &= \frac{\mu x + A}{\mu t + B} & t \neq -\frac{B}{\mu}, \quad \mu, A, B \in \mathbb{R} \\ &= \frac{x + C}{t + D} & t \neq -D, \quad C, D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 [3+2+3+2 = 10 Punkte]

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit $e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^t & 0 \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}$.

(b) Finden Sie eine Transformation, welche die Differentialgleichung

$$y'(x) = \sqrt{1 + x^2}\, y(x) + \left(\frac{y(x)}{1 + x^2}\right)^{2014}$$

in eine lineare DGL überführt und geben Sie die transformierte Gleichung an (ohne die resultierende DGL zu lösen). Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y' \sqrt{x^2 - y} = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})$$

exakt ist und geben Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $y(3) = 5$ in impliziter Form an.

(d) Geben Sie eine homogene lineare Differentialgleichung an, deren Lösungsraum von folgenden Funktionen aufgespannt wird:

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad y_3(x) = e^{-x}, \quad y_4(x) = e^{\mathrm{i}x}, \quad y_5(x) = e^x, \quad y_6(x) = 1.$$

LÖSUNG:

(a) $e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^t & 0 \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & e^t & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$.

Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} = A e^{tA}$, also

$$A = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA}\right) e^{-tA} = \begin{pmatrix} \sinh t & 0 & \cosh t \\ 0 & e^t & 0 \\ \cosh t & 0 & \sinh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & -\sinh t \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ -\sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cosh^2 t - \sinh^2 t \\ 0 & 1 & 0 \\ \cosh^2 t - \sinh^2 t & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ: Es ist

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Die DGL ist vom Bernoulli-Typ

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)y(x)^{\alpha}$$

mit $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{2014}$, $\alpha = 2014$. Diese DGL geht durch die Substitution $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$, also $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, wegen

$$y'(x) = \tfrac{1}{1-\alpha} z(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z'(x)$$

in die lineare DGL erster Ordnung

$$\tfrac{1}{1-\alpha} z(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z'(x) = f(x)z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} + g(x)z(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{bzw.} \quad z'(x) = (1-\alpha)f(x)z(x) + (1-\alpha)g(x),$$

also $z'(x) = -2013\sqrt{1+x^2}z(x) - 2013\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{2014}$, über.

(c) Die DGL lässt sich schreiben als

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})\,\mathrm{d}x - \sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y = 0. \tag{3}$$

Setzt man $f(x,y) = 2x(1+\sqrt{x^2-y})$ und $g(x,y) = -\sqrt{x^2-y}$, so gilt

$$(D_2 f)(x,y) = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y}}, \quad (D_1 g)(x,y) = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y}}$$

und somit $D_2 f = D_1 g$. Es folgt, dass die DGL (3) exakt ist.

Lösungen sind Höhenlinien $H(x,y) = C \in \mathbb{R}$ eines Potentials $H(x,y)$ von $\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$.

Aus $D_1 H(x,y) = f(x,y) = 2x(1+\sqrt{x^2-y})$ folgt

$$H(x,y) = \int f(x,y)\,\mathrm{d}x = x^2 + \int 2x\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x = x^2 + \tfrac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} + a(y),$$

und $D_2 H(x,y) = g(x,y) = -\sqrt{x^2-y}$ liefert

$$H(x,y) = \int g(x,y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} + b(x).$$

Damit ist $H(x,y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}$ ein Potential zu $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Wegen $H(3,y(3)) = H(3,5) = \frac{43}{4}$ ist die Lösung des AWPs in impliziter Form gegeben durch

$$x^2 + \tfrac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} = \tfrac{43}{4}.$$

(d) Da $\cos x, \sin x, e^{\mathrm{i}x} \in \operatorname{lin}\left\{e^{\mathrm{i}x}, e^{-\mathrm{i}x}\right\}$, gilt

$$\operatorname{lin}\left\{y_k, k = 1, \dots, 6\right\} = \operatorname{lin}\left\{e^{\alpha x}, \alpha = \pm\mathrm{i}, \pm 1, 0\right\}.$$

Das charakteristische Polynom der DGL ist daher

$$p(\lambda) = (\lambda+\mathrm{i})(\lambda-\mathrm{i})(\lambda+1)(\lambda-1)\lambda = (\lambda^2+1)(\lambda^2-1)\lambda = (\lambda^4-1)\lambda = \lambda^5 - \lambda.$$

Die lineare homogene DGL mit diesem charakteristischen Polynom ist

$$y^{(5)} - y' = 0.$$