Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
04.03.2014

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1:

(a) Für $y_1(x) = e^{\alpha x^2}$ gilt

$$y'(x) = 2\alpha x e^{\alpha x^2} \quad \text{und} \quad y''(x) = (4\alpha^2 x^2 + 2\alpha)e^{\alpha x^2}$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$2(\alpha+1)\Big(2(\alpha+1)x^2+1\Big)e^{\alpha x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \alpha = -1,$$

d.h. $y_1(x) = e^{-x^2}$.
Für y_2 machen wir den Ansatz $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Dann gilt für v

$$v''(x) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$v(x) = C_1 + C_2 x, \qquad\qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

und somit

$$\begin{aligned} y(x) &= C_3 y_1(x) + C_4 y_2(x) = C_3 y_1(x) + C_4 v(x) y_1(x) \\ &= C_5 e^{-x^2} + C_6 x e^{-x^2} \end{aligned}$$

mit $C_3, \ldots, C_6 \in \mathbb{R}$ und $C_5 := C_3 + C_1 C_4, C_6 := C_2 C_4$.

(b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom p lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

und seine Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \pm i$. Damit bilden

$$y_1(x) = \sin x \quad \text{und} \quad y_2(x) = \cos x$$

fur alle $x \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem fur die gegebene Differentialgleichung.
Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist $4 \sin x$, d.h. $m = 0, \sigma = 0, \omega = 1$ (siehe Vorlesungsskript, Abschnitt 22.11) . Da $\sigma + i\omega = i$ eine Nullstelle von p ist, machen wir den folgenden Ansatz für die spezielle Lösung y_p:

$$y_p(x) = x(a \sin x + b \cos x), \qquad\qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\underbrace{2a\cos x - 2b\sin x - x(a\sin x + b\cos x)}_{=y_p''(x)} + x(a\sin x + b\cos x) = 4\sin x.$$

Koeffizientenvergleich führt auf $a = 0, b = -2$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - 2x\cos x.$$

Aufgabe 2:

(a) Da für $P(x, y) = 2x$ und $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$ gilt

$$P_y = 0 \neq 2x = Q_x,$$

ist die gegebene Differentialgleichung nicht exakt. Es gilt aber

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = 1,$$

d.h. es gibt ein integrierender Faktor μ, der nur von y abhängt. Für diesen erhilt man

$$\mu'(y) = \mu(y) \quad \Longrightarrow \quad \mu(y) = e^y.$$

Folglich ist die Differentialgleichung

$$\underbrace{2xe^y}_{=:\tilde{P}(x,y)} \,\mathrm{d}x + \underbrace{(x^2 + y^2 + 2y)e^y}_{=:\tilde{Q}(x,y)} \,\mathrm{d}y = 0$$

exakt. Als nächstes suchen wir eine Stammfunktion zu $(\tilde{P}, \tilde{Q})$, d.h. eine Funktion F mit

$$F_x(x, y) = \tilde{P}(x, y) \quad \text{und} \quad F_y(x, y) = \tilde{Q}(x, y).$$

Integrieren wir die erste Gleichung nach x, so erhalten wir

$$F(x, y) = \int 2xe^y \mathrm{d}x = x^2 e^y + C(y),$$

wobei $C(y)$ eine von y abhängige Integrationskonstante ist. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$F_y(x, y) = x^2 e^y + C'(y) \stackrel{!}{=} (x^2 + y^2 + 2y)e^y \quad \Longleftrightarrow \quad C'(y) = (y^2 + 2y)e^y,$$

d.h.

$$\begin{aligned} C(y) &= \int (y^2 + 2y)e^y \mathrm{d}y = \int y^2 e^y \mathrm{d}y + \int 2ye^y \mathrm{d}y \\ &= \int y^2 \mathrm{d}e^y + \int 2ye^y \mathrm{d}y = y^2 e^y - \int e^y \mathrm{d}y^2 + \int 2ye^y \mathrm{d}y \\ &= y^2 e^y - \int e^y 2y \mathrm{d}y + \int 2ye^y \mathrm{d}y = y^2 e^y \end{aligned}$$

und somit erhalten wir

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)e^y.$$

Die allgemeine Lösung ist daher implizit gegeben durch

$$(x^2 + y^2)e^y = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) $\mu = e^{\alpha x+\beta y}$ ist ein integrierender Faktor genau dann, wenn gilt

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x.$$

Für die gegebene Differentialgleichung ist das äquivalent zu

$$e^{\alpha x+\beta y}[\beta y + \beta xy + \beta \sin y + 1 + x + \cos y] = e^{\alpha x+\beta y}[\alpha x + \alpha \cos y + 1]$$

und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $\alpha = 1$ und $\beta = 0$.

Aufgabe 3: Das gegebene Anfangswertproblem ist

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist schon in ihrer Jordan-Normalform und daher gilt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des gegebenes Anfangswertproblem ist dann durch

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= e^{tA}\vec{y}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{2(t-s)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} & (t-s)e^{t-s} \\ 0 & 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} \\ \beta e^t + \gamma te^t \\ \gamma e^t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t-2s} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} \\ \beta e^t + \gamma te^t + \sinh(t) \\ \gamma e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

gegeben.

Aufgabe 4:

(a) Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}}_{=\vec{a}\left((x,y),u\right)} \cdot \nabla u(x,y) &= \underbrace{6x}_{=\vec{b}\left((x,y),u\right)}, \\
u(0,y) &= \underbrace{3y}_{=f(y)}.
\end{aligned}$$

Zur Parametrisierung der y-Achse verwenden wir den reellen Parameter ξ, hier ist $\Gamma = \{(0,\xi) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Das charakteristische System und die Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}
\vec{k}'(s) &= \vec{a}\big(\vec{k}(s), \omega(s)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega(s) \end{pmatrix} & \vec{k}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \\
\omega'(s) &= \vec{b}\big(\vec{k}(s), \omega(s)\big) = 6k_1(s) & \omega(0) &= f(\xi) = 3\xi
\end{aligned}$$

mit Lösung

$$\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \\ \omega(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s^3 + 3\xi s + \xi \\ 3s^2 + 3\xi \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff s = x, \quad \xi = \frac{y - x^3}{3x+1}$$

und somit ist

$$u(x,y) = \omega\Big(x, \frac{y-x^3}{3x+1}\Big) = 3\frac{2x^3 + x^2 + y}{3x+1}.$$

(b) Mit dem Ansatz $u(x,t) = e^{it}v(x)$ wird die gegebene Differentialgleichung zu

$$e^{it}\big(v''(x) - v(x)\big) = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Da dies für jede $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ gelten muss, muss

$$v''(x) - v(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$v(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

und somit

$$u(x,t) = e^{it}\big(C_1 e^x + C_2 e^{-x}\big).$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmen wir die Konstanten C_1 und C_2:

$$\begin{aligned} u(0,0) = C_1 + C_2 &\overset{!}{=} 0 \iff C_1 = -C_2, \\ \partial_x u(0,0) = 2C_1 &\overset{!}{=} 1 \iff C_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und folglich

$$u(x,t) = e^{it}\sinh(x).$$