Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Frühjahr 2016
07.03.2016

**Modulprüfung / Bachelor**

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik**

## Aufgabe 1 ( 5 + 5 Punkte)

**a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y(x) = e^{2x} + x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Lösungsvorschlag:** Das Charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet $\lambda^2 - 4$ und es hat die zwei einfachen Nullstellen 2 und -2. Deshalb ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Wir suchen jetzt eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y''(x) - 4y(x) = e^{2x}$. Da 2 eine Nullstelle des Charakteristischen Polynoms ist machen wir den Ansatz $y_{p_1}(x) = Axe^{2x}$. Das gibt $y''_{p_1}(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$. Deshalb $y''_{p_1}(x) - 4y_{p_1}(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 4Axe^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x}$. Das gibt $A = \frac{1}{4}$ oder $y_{p_1}(x) = \frac{1}{4}xe^{2x}$. Für die Differentialgleichung $y''(x) - 4y(x) = x^2$ suchen wir eine partikuläre Lösung $y_{p_2}(x) = ax^2 + bx + c$. Das gibt $y''_{p_2}(x) - 4y_{p_2}(x) = 2a - 4ax^2 - 4bx - 4c \stackrel{!}{=} x^2$. Ein Koeffizientenvergleich gibt $a = -\frac{1}{4}, b = 0, c = -\frac{1}{8}$. Also $y_{p_2}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$. Deshalb lautet die allgemeine Lösung der Ursprünglichen Differentialgleichung

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}.$$

**b)** Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -\frac{1}{2}y^2(x), \quad x > 0, \quad y(1) = 2.$$

**Lösungsvorschlag:** Die Gleichung ist eine Bernoulische Differentialgleichung. Wir werden sie mit der Substitution $u = y^{-1}$ lösen. Wenn wir die Gleichung überall mit $y^{-2}$ multiplizieren, bekommen wir die Differentialgleichung

$$y'(x)y^{-2}(x) + \frac{1}{x}y^{-1}(x) = -\frac{1}{2}.$$

oder, wenn wir berücksichtigen, dass $u'(x) = -y'(x)y^{-2}(x)$,

$$u'(x) - \frac{1}{x}u(x) = \frac{1}{2}.$$

Wenn wir beide Seiten mit $e^{-\int dx \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ multiplizieren, bekommen wir

$$\frac{1}{x}u'(x) - \frac{1}{x^2}u(x) = \frac{1}{2x},$$

oder

$$\left(\frac{u(x)}{x}\right)' = \frac{1}{2x}.$$

Das gibt $\frac{u(x)}{x} = \frac{1}{2}\ln(x) + c \iff y = \frac{1}{\frac{1}{2}x\ln(x)+cx}$, da $y = \frac{1}{u}$. Da aber $y(1) = 2$ erhalten wir $2 = \frac{1}{\frac{1}{2}1\ln(1)+c}$ und deshalb $c = \frac{1}{2}$. Deshalb lautet die Lösung $y(x) = \frac{2}{x(1+\ln(x))}$. Die Lösung existiert, wenn $x > 0$ und $1 + \ln(x) > 0 \iff x > \frac{1}{e}$. Die Bedingung $1 + \ln(x) > 0$ liegt daran, dass $1+\ln(x)$ nicht Null sein darf und dass $1+\ln(1) > 0$ ($x = 1$ ist die Stelle der Anfangsbedingung). Also ist das maximale Existenzintervall der Lösung $(\frac{1}{e}, \infty)$.

**Aufgabe 2 ( 5 + 5 Punkte)**

**a)** Bestimmen Sie mittels des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Lösungsvorschlag**: Da $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, bekommen wir $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und deshalb

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n.$$

Ferner haben wir

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

Deshalb bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - 2a_n\right) x^n = 0.$$

Deshalb müssen alle Koeffizienten von $x^n$ der linken Seite verschwinden. Das gibt

$$a_{n+2} = -\frac{(n-2)a_n}{(n+2)(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Aber $a_1 = y'(0) = 0$ und das mit der letzte Gleichung gibt, dass $a_n = 0$ für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$. Zusätzlich haben wir $a_0 = y(0) = 1$ deshalb $a_{0+2} = -\frac{(0-2)a_0}{(0+2)(0+1)} = 1$, also $a_2 = 1$ und deshalb $a_4 = a_{2+2} = -\frac{(2-2)a_2}{(2+2)(2+1)} = 0$. Das gibt $a_n = 0$ für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$. Deshalb, bekommen wir $y(x) = x^2 + 1$.

**b)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x+1)y''(x) - (3x+4)y'(x) + (2x+3)y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = e^x$.

**Lösungsvorschlag:** Der Ansatz $y_2(x) = e^x v(x)$ für eine zweite Lösung der Differentialgleichung führt zu der Gleichung

$$(x+1)(e^x v''(x) + 2(e^x)'v'(x) + (e^x)''v(x)) - (3x+4)(e^x v'(x) + (e^x)'v(x)) + (2x+3)e^x v(x) = 0, \quad x > 0.$$

Und da $e^x$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, bekommen wir

$$(x+1)(e^x v''(x) + 2e^x v'(x)) - (3x+4)e^x v'(x) = 0, \quad x > 0,$$

oder wenn man vereinfacht

$$v''(x) = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) v'(x), \quad x > 0.$$

Das gibt $v'(x) = e^{\int \left(1+\frac{1}{x+1}\right) dx}$ und eine mögliche Wahl von $v'$ ist $v'(x) = e^{x+\ln(1+x)} = (x+1)e^x$. Deshalb bekommen wir mit partieller Integration $v(x) = \int (x+1)e^x dx = \int (x+1)(e^x)' dx = (x+1)e^x - \int (x+1)' e^x dx = xe^x + c$, wobei die Konstante $c$ Null gewählt werden kann. Deshalb ist eine zweite Lösung der Differentialgleichung $y_2(x) = e^x v(x) = xe^{2x}$. Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 3 ( 7 + 3 Punkte)**

**a) (i)** Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

<u>Hinweis</u>: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A-\lambda I) = -(\lambda-1)(\lambda^2+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei $I$ die Einheitsmatrix ist.

$$(A-I)\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff -v_1 + v_2 = 0 \text{ und } -2v_2 - v_3 = 0.$$

Das liefert den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und deshalb die Lösung $\phi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Wir suchen jetzt einen Eigenvektor zum Eigenwert $i$. Es gilt

$$(A - iI)\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -1-i & -1 \\ -1 & 3 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff -iv_1 + v_2 = 0 \text{ und } -(1+i)v_2 - v_3 = 0.$$

Das liefert den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}$ und deshalb die Lösung

$$e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Das liefert die reellen Lösungen $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$ und $\phi_3(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$.

$\phi_j, j = 1, 2, 3$ bilden ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

**(ii)** Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} w_1''(t) = -w_1'(t) - w_2(t), \\ w_2'(t) = -w_1(t) + 3w_1'(t) + 2w_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

für $t \in \mathbb{R}$ in das System erster Ordnung aus Teil **(i)**. Geben Sie dann die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (1) an.

**Lösungsvorschlag**: Wir führen die Variable $v = w_1'$ ein. Dann bekommen wir

$$\begin{cases} w_1' = v \\ v' = w_1'' = -w_1' - w_2 = -v - w_2 \\ w_2' = -w_1(t) + 3w_1'(t) + 2w_2(t) = -w_1 + 3v + 2w_2 \end{cases} \iff \begin{cases} w_1' = v \\ v' = -v - w_2 \\ w_2' = -w_1 + 3v + 2w_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix},$$

was dem Differentialgleichungssystem aus Teil **a)** entspricht. Die allgemeine Lösung davon ist wegen des Teiles a)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} C_j \phi_j(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Deshalb lautet die allgemeine Lösung von (1)

$$\begin{cases} w_1(t) = C_1 e^t + C_2 \cos(t) + C_3 \sin(t) \\ w_2(t) = -2C_1 e^t + C_2(\cos(t) + \sin(t)) + C_3(\sin(t) - \cos(t)). \end{cases}$$

**b)** Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $e^{\frac{\pi B}{3}}$ über die Reihendarstellung der Matrixexponentialfunktion.

**Lösungsvorschlag**: Man berechnet $B^2 = -I$. Daraus folgt $B^{2k} = (-1)^k I$ und $B^{2k+1} = (-1)^k B$. Deshalb gilt

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} B^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!} = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}(-1)^k}{(2k)!} + B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!}$$

Also

$$e^{tB} = I\cos(t) + B\sin(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Das gibt

$$e^{\frac{\pi}{3}B} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4 ( 8 + 2 Punkte)** Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

**a)** Bestimmen Sie alle Lösungen $u$ des Randwertproblems der Form $u(x,t) = v(x)w(t)$.

**Lösungsvorschlag**: Der Separationsansatz führt zur Gleichung $w'(t)v(x) = w(t)v''(x)$ oder $\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}$. Da die linke Seite nur von $t$ und die Rechte nur von $x$ abhängt, müssen beide gleich einer Konstante $d \in \mathbb{R}$ sein. Also

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = d.$$

**Fall 1:** $d > 0$. Dann setzen wir $d = k^2, k > 0$ und bekommen wir $v''(x) - k^2 v(x) = 0$. Das hat die allgemeine Lösung $v(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}$. Ferner $v'(x) = Cke^{kx} - Dke^{-kx}$. Aber die Randbedingungen geben $v(0) = 0$ und $v'(2\pi) = 0$. Aus $v(0) = 0$ folgt $C + D = 0$ oder $D = -C$. Deshalb folgt aus $v'(2\pi) = 0$, dass $Cke^{2\pi k} + Cke^{-2\pi k} = 0$ oder $C(e^{2\pi k} + e^{-2\pi k}) = 0$. Da $e^{2\pi k} + e^{-2\pi k} \neq 0$, bekommen wir $C = 0$ und deshalb $C = D = 0$ oder $v(x) = 0$ und der Fall $d > 0$ liefert keine nicht trivialle Lösung.

**Fall 2:** $d = 0$. Dann bekommen wir $v''(x) = 0$ oder $v(x) = Cx + D$. Aber die Randbedingungen geben $v(0) = 0 \implies D = 0$ und $v'(2\pi) = 0 \implies C = 0$. Deshalb ist $v(x) = 0$ und der Fall $d = 0$ liefert keine nicht triviale Lösung.

**Fall 3:** $d < 0$. Dann setzen wir $d = -k^2, k > 0$ und bekommen wir $v''(x) + k^2 v(x) = 0$. Das hat die allgemeine Lösung $v(x) = C\cos(kx) + D\sin(kx)$. Da $v'(x) = -Ck\sin(kx) + Dk\cos(kx)$ bekommen wir $v(0) = 0 \implies C = 0$. $v'(2\pi) = 0 \implies Dk\cos(2\pi k) = 0$. Da aber $C = 0$, muss für eine Lösung $v$, die nicht Null ist, $D \neq 0$ gelten und deshalb bekommen wir $\cos(2k\pi) = 0$. Das gibt $2k\pi \in \{m\pi - \frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{N}\}$ oder $k = \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$. Das liefert die Lösungen $v_m(x) = \sin((\frac{m}{2} - \frac{1}{4})x), m \in \mathbb{N}$. Somit gilt $w_m(t) = C_m e^{-(\frac{m}{2} - \frac{1}{4})^2 t}$ und die separierten beschränkten Lösungen lauten $C_m e^{-(\frac{m}{2} - \frac{1}{4})^2 t} \sin((\frac{m}{2} - \frac{1}{4})x), m \in \mathbb{N}$.

**b)** Lösen Sie das obige Randwertproblem mit der zusätzlichen Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{3x}{4}\right), \quad x \in [0, 2\pi].$$

**Lösungsvorschlag**: Einsetzen von $t = 0$ in die Lösungen aus Teil **a)** ergibt die richtige Lösung für $m = 2, C_m = 1$, also $e^{-\frac{9t}{16}} \sin\left(\frac{3x}{4}\right)$. Man kann aber diesen Teil auch ohne Teil **a)** lösen: Der Ansatz $u(x,t) = w(t)\sin\left(\frac{3x}{4}\right)$ führt zur Gleichung $w'(t) = -\frac{9}{16}w(t)$ und daraus folgt, dass $w(t) = Ce^{-\frac{9t}{16}}$. Dies liefert $u(x,t) = Ce^{-\frac{9t}{16}} \sin\left(\frac{3x}{4}\right)$. Die Anfangsbedingung gibt nun $C = 1$. Man kann auch überprüfen, dass die Randbedingungen erfühlt sind. Deshalb ist

$$u(x,t) = e^{-\frac{9t}{16}} \sin\left(\frac{3x}{4}\right).$$

die Lösung des Anfangswertproblems.