Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

WS 2016/2017
07.03.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

a) Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= xy + x^3y^2, \quad x \in (-1,1) \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Begründen Sie, warum die Lösung tatsächlich auf $(-1,1)$ existiert.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x)y''(x) + (\sin(x) - 2\cos(x))y'(x) + (\cos(x) - \sin(x))y(x) = 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = e^x$.

Aufgabe 2 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 6e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' - 6xy' - 4y &= 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 3. \end{aligned}$$

auf $I = (-1,1)$. Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes. Geben Sie die Koeffizienten dabei explizit an.

Hinweis: Es ist $n^2 + 5n + 4 = (n+4)(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (7+3=10 Punkte)

a) **(i)** Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das charakteristische Polynom der Matrix gegeben ist durch $\det(A - \lambda I) = -(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)$.

(ii) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} w_1''(t) = 5w_1(t) + w_2(t), \\ w_2'(t) = 4w_1(t) - 4w_1'(t) + w_2(t), \end{cases} \tag{0.1}$$

für $t \in \mathbb{R}$ in das System erster Ordnung aus Teil **(i)**. Geben Sie dann die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (0.1) an.

b) Wir betrachten die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Gegeben ist, dass $e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,' = B\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (6 + 4 Punkte)

a) Finden Sie alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} xu_{xx} + u_x &= \frac{u_t}{x}, \\ u(1,t) &= 0, \\ u(\mathrm{e},t) &= 0, \end{aligned}$$

für alle $x > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$, die die separierte Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ besitzen.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Methode der Charakteristiken das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t = 2u_x + e^t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin(x). \end{cases}$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Donnerstag, den **27.04.2017**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) und unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **04.05.2017**, von **16 bis 18 Uhr** in der **Neuen Chemie (Geb. 30.46)** statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **08.05.2017** bis **12.05.2017** statt.