Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

WS 2016/2017
07.03.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

a) Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = xy + x^3y^2, \quad x \in (-1,1)$$
$$y(0) = 1.$$

Begründen Sie, warum die Lösung tatsächlich auf $(-1,1)$ existiert.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\cos(x)y''(x) + (\sin(x) - 2\cos(x))y'(x) + (\cos(x) - \sin(x))y(x) = 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

<u>Hinweis</u>: Eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = e^x$.

Lösungsvorschlag

a) Es handelt sich hierbei um eine Bernoulli-Gleichung mit $\alpha = 2$ als Exponenten. Wir multiplizieren mit $-y^{-2}$ und erhalten die Gleichung

$$-\frac{y'}{y^2} = -\frac{x}{y} - x^3$$

Nun substituieren wir $z := y^{-1}$, womit sich

$$-\frac{y'}{y^2} = z' = -xz - x^3$$

ergibt mit Anfangswert $z(0) = (y(0))^{-1} = 1$. Dieses lineare Anfangswertproblem lösen wir, indem wir

$$A(x) = \int_0^x -s \,\mathrm{d}s = -\frac{x^2}{2}$$

und

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-A(s)} \cdot (-s^3)\,\mathrm{d}s = \int_0^x s\mathrm{e}^{\frac{s^2}{2}} \cdot (-s^2)\,\mathrm{d}s \overset{\text{P.I.}}{=} -s^2\mathrm{e}^{\frac{s^2}{2}}\Big|_{s=0}^x - \int_0^x (-2s)\mathrm{e}^{\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s$$
$$= (2-s^2)\mathrm{e}^{\frac{s^2}{2}}\Big|_0^x = (2-x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 2.$$

Die Lösung ist also gegeben durch

$$z(x) = z(0)\mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int_0^x \mathrm{e}^{-A(s)} \cdot (-s^3)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}((2-x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 2) = 2 - x^2 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Eine Resubstitution liefert nun die Lösung des Ausgangsproblems, nämlich

$$y(x) = \frac{1}{2 - x^2 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}.$$

Zu begründen, dass die Lösung auf (-1,1) existiert, reicht es zu zeigen, dass $f(x) := 2 - x^2 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0$ für alle $x \in (-1,1)$. Da f gerade ist reicht es zu zeigen, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (0,1)$. Das folgt aber weil $f(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} > 0$ und f ist monoton fallend auf $(0,1)$ da $f'(x) = x(-2 + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) < 0$ auf $(0,1)$.

b) Der Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$ liefert die Gleichung

$$v'' + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}v' = 0,$$

die mit der Substitution $w := v'$ zu

$$w' + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}w = 0$$

wird. Für die Lösung dieser Gleichung berechnen wir

$$A(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos(x)) + C$$

und das liefert z.B. die Lösung

$$w(x) = \mathrm{e}^{\ln(\cos(x))} = \cos(x)$$

Daraus folgern bekommen wir z.B. die Lösung

$$v(x) = \int w(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + D$$

Schließlich ergibt sich daraus für $D = 0$

$$y(x) = \sin(x)y_1(x) = e^x \sin(x).$$

Die Lösungen sind y, y_1 linear unabhängig, da die Wronskii Determinante

$$\begin{vmatrix} y(0) & y_1(0) \\ y'(0) & y_1'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

nicht Null ist. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet deshalb

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^x \sin(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

AUFGABE 2 (5 + 5 = 10 PUNKTE)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 6e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

auf $I = (-1, 1)$. Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes. Geben Sie die Koeffizienten dabei explizit an.

Hinweis: Es ist $n^2 + 5n + 4 = (n+4)(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ und das hat die Nullstellen 1 und -3. Deshalb lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $C_1e^x + C_2e^{-3x}$. Da 1 eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, suchen wir partikuläre Lösung der Form $y_p(x) = Axe^x$. Dann $y_p'(x) = A(x+1)e^x$ und $y_p''(x) = A(x+2)e^x$. Deshalb wenn wir einsetzen bekommen wir $4Ae^x = 6e^x$. Also $A = \frac{3}{2}$. Deshalb lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \frac{3}{2}xe^x$$

Da $y(0) = 0$ folgt, dass $C_1 + C_2 = 0$ oder $C_2 = -C_1$. Da $y'(0) = 0$ folgt, dass $C_1 - 3C_2 + \frac{3}{2} = 0$. Deshalb gilt $C_1 = -\frac{3}{8}, C_2 = \frac{3}{8}$. Daraus folgt, dass die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y = -\frac{3}{8}e^x + \frac{3}{8}e^{-3x} + \frac{3}{2}xe^x.$$

b) Wir beginnen mit dem Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$
\begin{aligned}
0 = (1-x^2)y'' - 6xy' - 4y &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+5n+4)a_n\Big) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+4)(n+1)a_n\right) x^n.
\end{aligned}
$$

Der Koeffizientenvergleich liefert nun die Rekursion

$$
a_{n+2} = \frac{(n+4)(n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{n+4}{n+2} a_n.
$$

Wir unterscheiden nun nach geraden und ungeraden Koeffizienten.
<u>1. Fall:</u> n gerade ($n = 2k, k \in \mathbb{N}_0$). Es folgt $a_0 = y(0) = 0$ und somit

$$
a_n = a_{2k} = \frac{2k+2}{2k} a_{2k-2} = \frac{2k+2}{2k} \cdot \frac{2k}{2k-2} a_{2k-4} = \frac{2k+2}{2k-2} a_{2k-4} = \ldots = \frac{2k+2}{2} a_0 = 0.
$$

<u>2. Fall:</u> n ungerade ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0$). Es folgt $a_1 = y'(0) = 3$ und somit

$$
a_n = a_{2k+1} = \frac{2k+3}{2k+1} a_{2k-1} = \frac{2k+3}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1} a_{2k-3} = \frac{2k+3}{2k-1} a_{2k-3} = \ldots = \frac{2k+3}{3} a_0 = (2k+3).
$$

Somit folgt für die Lösung

$$
y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3) x^{2k+1}
$$

für $x \in (-1, 1)$.

AUFGABE 3 (7+3=10 PUNKTE)

a) **(i)** Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

<u>Hinweis:</u> Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das charakteristische Polynom der Matrix gegeben ist durch $\det(A - \lambda I) = -(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)$.

(ii) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} w_1''(t) = 5w_1(t) + w_2(t), \\ w_2'(t) = 4w_1(t) - 4w_1'(t) + w_2(t), \end{cases} \tag{0.1}$$

für $t \in \mathbb{R}$ in das System erster Ordnung aus Teil **(i)**. Geben Sie dann die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (0.1) an.

b) Wir betrachten die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Gegeben ist, dass $e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,' = B\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a)

$$(A+I)\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff v_1 + v_2 = 0 \text{ und } 5v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

Das liefert den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und deshalb die Lösung $\phi_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$(A-I)\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff -v_1 + v_2 = 0 \text{ und } 5v_1 - v_2 + v_3 = 0.$$

Das liefert die den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und deshalb die Lösung $\phi_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Da es keinen anderen linear unabhängingen Eigenvektor gibt, aber die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 2 ist, müssen wir eine zusätzliche Lösung finden. Dafür lösen wir die Gleichung

$$(A-I)\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da die zweite Komponente des Eigenvektors nicht Null ist, kann $w_2 = 0$ gewählt werden. Das führt zu $w_1 = -1$ und $w_3 = 4$ also $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Das liefert die Lösung

$$\phi_3(t) = e^t(\vec{w} + (A - I)t\vec{w}) = e^t \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} -1+t \\ t \\ 4-4t \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen $\phi_j, j = 1,2,3$ bilden ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

b) Wir führen die Variable $v = w_1'$ ein. Dann bekommen wir

$$\begin{cases} w_1' = v \\ v' = w_1'' = 5w_1' + w_2 = 5v + w_2 \\ w_2' = 4w_1(t) - 4w_1'(t) + w_2(t) = 4w_1 - 4v + w_2 \end{cases} \iff \begin{cases} w_1' = v \\ v' = -v - w_2 \\ w_2' = w_1 + v + 2w_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix},$$

was dem Differentialgleichungssystem aus Teil **a)** entspricht. Die allgemeine Lösung davon ist wegen des Teiles a)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} C_j \phi_j(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -1+t \\ t \\ 4-4t \end{pmatrix}.$$

Deshalb lautet die allgemeine Lösung von (0.1)

$$\begin{cases} w_1(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^t(-1+t) \\ w_2(t) = 4C_1 e^{-t} - 4C_2 e^t + C_3(4-4t)e^t \end{cases}$$

wobei $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

c) Man verwendet die aus der Vorlesung bekannte Formel. Deshalb gilt

$$\vec{y}(t) = \mathrm{e}^{Bt}\,\vec{y}(0) + \mathrm{e}^{Bt} \int_0^t \mathrm{e}^{-Bs} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

Setzt man ein ergibt sich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{Bt} \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s}_{= \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}},$$

sodass durch Ausführen der Multiplikation und Addition gilt:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) + 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (6 + 4 Punkte)

a) Finden Sie alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} xu_{xx} + u_x &= \frac{u_t}{x}, \\ u(1,t) &= 0, \\ u(\mathrm{e},t) &= 0, \end{aligned}$$

für alle $x > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$, die die separierte Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ besitzen.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Methode der Charakteristiken das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t = 2u_x + e^t, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin(x). \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

a) Der Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ liefert

$$xv''(x)w(t) = \frac{v(x)w'(t)}{x} - v'(x)w(t).$$

Umstellen nach x und t ergibt

$$\frac{x^2v''(x) + xv'(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

da beide Seiten nur von einer Variablen abhängen, die beliebig gewählt werden kann. Die rechte Seite liefert die Gleichung

$$w'(t) = \lambda w(t) \Rightarrow w(t) = C\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die linke Seite liefert die Gleichung

$$x^2v''(x) + xv'(x) - \lambda v(x) = 0,$$

eine Eulersche Differentialgleichung. Der Ansatz $v(x) = u(\log(x))$, $y = \log(x)$. Es folgt

$$v'(x) = \frac{1}{x} \cdot u'(\log(x)), \qquad v''(x) = \frac{1}{x^2}(u''(\log(x)) - u'(\log(x))).$$

Einsetzen liefert

$$u''(y) - \lambda u(y) = 0,$$

eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom ist $p(\mu) = \mu^2 - \lambda$. Für die Nullstellen und somit die Lösung dieser Gleichung machen wir eine kleine Fallunterscheidung danach, ob λ positiv oder nicht-positiv ist.

<u>1. Fall:</u> $\lambda > 0 \Rightarrow \mu = \pm\sqrt{\lambda} \Rightarrow u(y) = c_1\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}y} + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}y} \Rightarrow v(x) = u(\log(x)) = c_1x^{\sqrt{\lambda}} + c_2x^{-\sqrt{\lambda}}$.

<u>2. Fall:</u> $\lambda \leqslant 0 \Rightarrow \mu = \pm\mathrm{i}\sqrt{-\lambda} \Rightarrow u(y) = c_1\cos(\sqrt{-\lambda}y) + c_2\sin(\sqrt{-\lambda}y)$

$\Rightarrow v(x) = u(\log(x)) = c_1\cos(\sqrt{-\lambda}\log(x)) + c_2\sin(\sqrt{-\lambda}\log(y))$.

Eine Lösung der Gleichung ist offensichtlich die Nullfunktion. Ansonsten folgt $w(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich $u(1) = u(\mathrm{e}) = 0$. Für $\lambda > 0$ bedeutet dies

$$0 = u(1) = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -C_2$$

und deshalb

$$0 = u(\mathrm{e}) = C_1(\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}}) \Rightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}} = \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}},$$

ein Widerspruch zu $\lambda > 0$, da die Exponentialfunktion strikt wachsend ist. Somit folgt $\lambda \leqslant 0$ und deshalb die Gleichungen

$$0 = u(1) = C_1$$

und

$$0 = u(\mathrm{e}) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}) \Leftarrow \sqrt{-\lambda} = k\pi (k \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow \lambda = -k^2\pi^2.$$

Somit folgen schließlich für $k \in \mathbb{N}_0$ und $C \in \mathbb{R}$ die separierten Lösungen

$$u_k(x,t) = v_k(x)w_k(t) = C\mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi \log(x)).$$

b) Für feste x, t definieren wir, $v(s) = u(x-2s, t+s)$. Dann $v'(s) = -2u_x(x-2s, t+s) + u_t(x-2s, t+s) = e^{t+s}$. Aber da $v(0) - v(-t) = \int_{-t}^{0} v'(s) ds$ bekommen wir $u(x,t) - u(x-2t, 0) = \int_{-t}^{0} e^{t+s} ds = e^t e^s|_{-t}^{0} = e^t - 1$ was zusammen mit der Anfangsbedingung liefert $u(x,t) = \sin(x+2t) + e^t - 1$.