Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos

WS 2018
05.03.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung alte Prüfungsordnung

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' + (3-2x)y' + (x-3)y = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist $y = e^x$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + 2xy' + 4y &= 12x, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Es reicht dabei, die Koeffizienten a_n zu bestimmen.

Aufgabe 2 (5+ (1 + 4)=10 Punkte)

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 2y' = x + e^{3x}$$

an.

b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A durch $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$ gegeben ist.

(ii) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

— bitte wenden —

AUFGABE 3 (3+7=10 PUNKTE)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t - u_x &= xt, \quad x,t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= e^x. \end{aligned}$$

b) Geben Sie alle Funktionen $u : [0, \frac{\pi}{2}] \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad t > 0,$$

an, die die Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ besitzen und die Randbedingungen

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$$

für alle $t > 0$ erfüllen.

AUFGABE 4 ((2+3)+5=10 PUNKTE)

a) Sei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Gegeben ist, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -2\sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix},$ ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = B\vec{y}$ bilden.

(i) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{1}{3}(x_2 - x_1) \\ x_2'' = \frac{2}{3}(x_1 - x_2), \end{cases} \tag{0.1}$$

in das Differentialgleichungssystem $\vec{y}\,' = B\vec{y}$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (0.1). Hierbei sind $x_j = x_j(t)$, $j = 1,2$ Funktionen von t.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\vec{y}\,' = B\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$.

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x}y - y^2, \quad x > 0, \\ y(1) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

VIEL ERFOLG!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Dienstag, den **17.04.2018**, neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **19.04.2018**, von **16 bis 18 Uhr** im **Hörsaal am Fasanengarten (Geb. 50.35)** statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **23.04.2018** bis **27.04.2018** statt.