Höhere Mathematik III für ETIT – Lösung

Aufgabe 1

a) Mit der ersten Lösung $y_1(x) = e^x$ machen wir den Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$. Wegen

$$y'(x) = v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x)$$
$$y''(x) = v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x)$$

ergibt sich durch Einsetzen

$$0 = x\left(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''\right) + (3-2x)\left(v'y_1 + vy_1'\right) + (x-3)vy_1$$
$$= v\underbrace{\left(xy_1'' + (3-2x)y_1' + (x-3)y_1\right)}_{=0\ (y_1\ \text{Lsg.})} + xy_1v'' + \underbrace{\left(2xy_1' + (3-2x)y_1\right)}_{=3y_1\ (y_1'=y_1)}v'$$
$$= y_1\left(xv'' + 3v'\right)$$

$$\overset{y_1>0}{\underset{x>0}{\Longrightarrow}} \quad v''(x) + \frac{3}{x}v'(x) = 0$$

Dasselbe Ergebnis ergibt sich durch Anwenden der Formel aus der VL. Mit $w := v'$ bedeutet dies

$$w'(x) = -\frac{3}{x}w(x)$$

und somit als lin. Dgl. 1. Ord.

$$w(x) = \hat{C}e^{\int -\frac{3}{x}\,dx} = \hat{C}e^{-3\log(x) + \tilde{c}} \overset{\hat{C}e^{\tilde{c}}=C}{=} Cx^{-3} \quad (C\in\mathbb{R})$$

Somit folgt

$$v(x) = \int w(x)\,dx = \underbrace{-\frac{C}{2}}_{=:A}x^{-2} + B \qquad (A,B\in\mathbb{R})$$

und schließlich für die allgemeine Lösung

$$y(x) = v(x)y_1(x) = Ax^{-2}e^x + Be^x, \quad A,B\in\mathbb{R},\ x>0.$$

b) Der Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ liefert wegen

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=\cancel{0}\,2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

durch Einsetzen

$$12x = y''(x) + 2xy'(x) + 4y(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \underbrace{2na_n + 4a_n}_{2(n+2)a_n}\Big] x^n$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$\underline{n=1}$: $12 = 6a_3 + 6a_1 \Rightarrow a_3 = 2 - a_1$

$\underline{n\neq 1}$: $0 = (\cancel{n+2})(n+1)a_{n+2} + 2(\cancel{n+2})a_n$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{2}{n+1} a_n \qquad (*)$$

Da $\underline{a_0} \overset{\text{Eins.}}{=} y(0) \overset{\text{Vor.}}{=} \underline{0}$, $a_1 \overset{\text{Eins.}}{=} y'(0) = 1$, folgt aus „$n=1$",
dass $\underline{a_3 = 1}$.

Für gerade $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ folgt aus $(*)$

$$a_{2k} \overset{(*)}{=} -\frac{2}{2k-1} a_{2k-2} \overset{(*)}{=} \dots \overset{(*)}{=} \frac{(-2)^k}{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1} a_0 = 0$$

Für ungerade $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ folgt aus $(*)$

$$a_{2k+1} \overset{(*)}{=} -\frac{2}{2k} a_{2k-1} \overset{(*)}{=} (-1)^2 \frac{2}{k(2k-2)} a_{2k-3}$$
$$= \frac{(-1)^2}{k(k-1)} a_{2k-3} \overset{(*)}{=} \dots \overset{(*)}{=} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} a_3 = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

Somit ist die Lösung $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade}, \\ 1, & n = 1, \\ \frac{(-1)^{k-1}}{k!}, & n = 2k+1 \ (k \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

wobei wir bemerken, dass $a_3 = 1$ ebenfalls der Formel von oben entspricht mit $k=1$.

Aufgabe 2

a) Das char. Pol. der Gleichung lautet

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

und hat somit die einfachen Nullstellen 0, 1 und 2.

sodass die homogene Lösung gegeben ist durch

$$y_h(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$$

Für die partikuläre Lösung betrachten wir die Summe auf der rechten Seite und benötigen als Ansatz die Summe der Ansätze der beiden Summanden, also

$$y_p(x) = (Ax+B)x + Ce^{3x} = Ax^2 + Bx + Ce^{3x}$$

da 0 eine Nullstelle des char. Pol. ist und 3 nicht.

Daraus folgt

$$y_p'(x) = 2Ax + B + 3Ce^{3x}$$
$$y_p''(x) = 2A + 9Ce^{3x}$$
$$y_p'''(x) = 27Ce^{3x}$$

und durch Einsetzen

$$x + e^{3x} \overset{!}{=} y_p'''(x) - 3y_p''(x) + 2y_p'(x)$$
$$= \cancel{27Ce^{3x}} - (6A + \cancel{27Ce^{3x}}) + 4Ax + 2B + 6Ce^{3x}$$
$$= 2(B-3A) + 4Ax + 6Ce^{3x}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $C = \frac{1}{6}$, $A = \frac{1}{4}$ und $B - 3A = 0$, also $B = \frac{3}{4}$ und somit als allg. Lsg.

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

b) (i) Das char. Pol. ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} I\cdot\lambda$$

entw.

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda(1+\lambda) & 3\lambda-1 \\ 1 & -(1+\lambda) & 3 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} -\lambda(1+\lambda) & 3\lambda-1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(1+\lambda)(2-\lambda) - (3\lambda - 1)$$

$$= 2\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 3\lambda + 1$$

$$\overset{\text{Ausmult.}}{=} -(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1)$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1).$$

(ii) Die Nullstellen von p_A sind 1 und $\pm i$, jeweils einfach.

<u>zu 1:</u> Es gilt

$$E_A(1) = \text{Kern}(A - I) = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \end{matrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cancel{0}\,-1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

und die zugehörige Lsg. somit $\underline{\underline{\vec{\Phi}_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x}}$

<u>zu $\pm i$:</u> Es gilt

$$E_A(i) = \text{Kern}(A - iI) = \text{Kern}\begin{pmatrix} -i & 0 & -1 \\ 1 & -(1+i) & 3 \\ 0 & -1 & 2-i \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-i) \cdot i \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & -(1+i) & 3+i \\ 0 & 1 & i-2 \end{pmatrix} \cdot(1+i) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i-2 \\ 0 & 0 & \cancel{0}\,-1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ i-2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 2-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

und die zug. Lsg. lauten

$$\underline{\underline{\vec{\Phi}_2(x)}} = \text{Re}\left(\begin{pmatrix} i \\ 2-i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos(x) + i\sin(x))\right)$$

$$= \text{Re}\begin{pmatrix} -\sin(x) + i\cos(x) \\ 2\cos(x) + \sin(x) + i(2\sin(x) - \cos(x)) \\ \cos(x) + i\sin(x) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 2\cos(x) + \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{\Phi}_3(x)}} = \text{Im}\left(\begin{pmatrix} i \\ 2-i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos(x) + i\sin(x))\right) \overset{\text{s.o.}}{=} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 2\sin(x) - \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

Das Fundamentalsystem lautet $\{\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_3\}$.

AUFGABE 3

a) Die linke Seite der Gleichung entspricht $\binom{-1}{1} \cdot \nabla u(x,t)$, was laut HM 2 der Richtungsableitung von u in Richtung $\binom{-1}{1}$ entspricht, also folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \binom{-1}{1}} (x,t) = xt. \qquad (*)$$

Die linke Seite lässt sich weiter schreiben als Ableitung der Funktion $\omega(s) = u(x-s, t+s)$, denn nach Kettenregel gilt

beschreibt u entlang Gerade durch $\binom{x}{t}$ mit Richtung $\binom{-1}{1}$

$$\begin{aligned} \omega'(s) &= (\partial_x u)(x-s, t+s) \cdot (-1) + (\partial_t u)(x-s, t+s) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \binom{-1}{1}} (x-s, t+s) \overset{(*)}{=} (x-s)(t+s) \qquad (**) \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hauptsatz

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x+t, 0) &= \omega(0) - \omega(-t) \\ &= \int_{-t}^{0} \omega'(s)\, ds = \int_{-t}^{0} xt + (x-t)s - s^2 \, ds \\ &= \left[xts + \frac{x-t}{2} s^2 - \frac{s^3}{3} \right]_{-t}^{0} \\ &= xt^2 - \frac{x-t}{2} \cdot t^2 - \frac{t^3}{3} = \frac{1}{2} xt^2 + \frac{1}{6} t^3 \end{aligned}$$

Wegen $u(x+t, 0) = e^{x+t}$ folgt daraus

$$u(x,t) = \frac{1}{2} xt^2 + \frac{1}{6} t^3 + e^{x+t} \qquad \forall x,t \in \mathbb{R}$$

b) Mit dem Ansatz $u(x,t) = v(x)\,\omega(t)$ ist die Gleichung äquivalent zu

$$v''(x)\,\omega(t) = v(x)\,\omega''(t) \qquad x \in (0, \tfrac{\pi}{2}),\ t > 0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} v(0)\,\omega(t) &= 0 \\ v'(\tfrac{\pi}{2})\,\omega(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad t > 0 \qquad (2)$$

Eine Lösung ist offenbar $u \equiv 0$. Andernfalls ist $\omega(t)$ und $v(x)$ nicht Null in mindestens einem (x,t)

womit aus (2) $v(0) = v'(\frac{\pi}{2}) = 0$ folgt und wir in einer Umgebung von (x,t) (1) umformen können zu

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{konstant}),$$

da die Gleichung für alle x und t gelten muss.

zu v: $v'' = \lambda v$

$\lambda > 0$: $v(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \overset{v(0)=0}{\Rightarrow} v(x) = A(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x})$

Wegen $0 = v'(\frac{\pi}{2}) = A\sqrt{\lambda}\,(\underbrace{e^{\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} + e^{-\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}}}_{>0})$ folgt $(\lambda > 0)$ $A = 0$ $\Rightarrow v \equiv 0$ ↯

$\lambda = 0$: $v(x) = Ax + B \overset{v(0)=0}{\Rightarrow} v(x) = Ax \overset{v'(\pi/2)=0}{\Rightarrow} v \equiv 0$ ↯

$\lambda < 0$: $v(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$

$\overset{v(0)=0}{\Rightarrow} \quad 0 = A \Rightarrow v(x) = B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$

$\overset{v'(\frac{\pi}{2})=0}{\Rightarrow} \quad 0 = B\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2})$

$\overset{B,\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \quad \sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \lambda = -(2k+1)^2 \Rightarrow v_k(x) = B\sin((2k+1)x)$
$(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

zu w: $w_k'' = -(2k+1)^2 w$

$\Rightarrow w_k(t) = C\cos((2k+1)t) + D\sin((2k+1)t)$

Als allg. Lsg. ergibt sich also

$$u_k(x,t) = \sin((2k+1)x)\big(C_1\cos((2k+1)t) + C_2\sin((2k+1)t)\big)$$

für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $(C_1 = C_2 = 0 \rightsquigarrow$ Nullfunktion$)$

Aufgabe 4

a) (i) Wir setzen $\vec{y}(t) = (x_1(t), x_1'(t), x_2(t), x_2'(t))^T$, womit folgt, dass

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_1''(t) \\ x_2'(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ -\frac{1}{3}x_1(t) + \frac{1}{3}x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \frac{2}{3}x_1(t) - \frac{2}{3}x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = B\vec{y}(t)$$

Somit ist die allg. Lsg. von (1), also $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, bestehend aus der 1. + 3. Komponente der allg. Lsg. von $\vec{y}' = B\vec{y}$, die wiederum aus Linearkomb. der 4 El. des FS entsteht:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} + C_4\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}$$

$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Nummerieren wir das Fundamentalsystem mit $\{\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_3, \vec{\Phi}_4\}$ durch, ist die allg. Lsg. von $\vec{y}' = B\vec{y}$ gegeben durch

$$\left(\vec{\Phi}_1\ \vec{\Phi}_2\ \vec{\Phi}_3\ \vec{\Phi}_4\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \vec{y}(t)$$

Setzen wir nun $t = 0$ und die Anfangsbedingung ein, ergibt sich das System

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) (-1),\ (-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{array} (-1),\ (-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Also folgt $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = c_4 = 0$ und somit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Lsg.

b) Es handelt sich um eine Bernoulli-Gleichung mit $\alpha = 2$. Multiplizieren wir mit $-y^{-2}$ (Ann. $y < 0$ wegen $y(1) < 0$), so ergibt sich

$$-y^{-2}y' = -\frac{1}{x}y^{-1} + 1, \quad y(1) = -\frac{1}{2}$$

Definieren wir nun $z := y^{-1}$, so folgt daraus

$$z' = -y^{-2}y' = -\frac{1}{x}y^{-1} + 1 = -\frac{1}{x}z + 1, \quad z(1) = -2.$$

Für diese lin. Dgl. 1. Ord. gilt

$$A(x) := \int_1^x -\frac{1}{s}\,ds = -\log(x) \qquad (x>0)$$

und damit die Lösung

$$z(x) = z(1)e^{A(x)} + e^{A(x)}\int_1^x e^{-A(s)}\cdot 1\,ds$$
$$= -2x^{-1} + x^{-1}\int_1^x s\,ds$$
$$= -2x^{-1} + x^{-1}\left[\frac{s^2}{2}\right]_1^x$$
$$= -2x^{-1} + x^{-1}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{5}{2}x^{-1} + \frac{x}{2} \qquad (x>0)$$

Schließlich folgt

$$y(x) = (z(x))^{-1} = \left(\frac{x^2-5}{2x}\right)^{-1} = \frac{2x}{x^2-5}.$$

Diese Funktion ist definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$ und $\lim_{x\to\sqrt{5}-} y(x) = -\infty$. Da die Gleichung nur für $x>0$ definiert ist ist das maximale Existenzintervall, das den Anfangspunkt 1 enthält, gegeben durch $(0,\sqrt{5})$. Auf diesem Intervall ist $y<0$, sodass unsere Rechnung gerechtfertigt ist.