

Diplom-Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Zeige

$$-(x^3 + xy^2 - x^5 - x^3y^2) dx + (x^2y + y^3) dy = 0$$

ist keine exakte Differentialgleichung.

b) Zeige $m(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ist ein integrierender Faktor. Bestimme dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

c) Bestimme die gebrochen lineare Abbildung, welche die Punkte

$$z_1 = -i, z_2 = 0, z_3 = i$$

in die Punkte (in dieser Reihenfolge)

$$w_1 = -1, w_2 = i, w_3 = 1$$

abbildet. Bestimme ferner das Bild der imaginären Achse.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Berechne

$$\int_0^{2\pi} \cos^{80}(x) dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes. **Beachte:** $(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

b) Bestimme die Laurentreihe der Funktion $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ um den Entwicklungspunkt $z = 1$, welche in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ konvergiert. **Hinweis:** Setze $z - 1 = u$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Zeichne in \mathbb{C} den geschlossenen Streckenzug Γ_R durch die Punkte

$$-R + 0i, -R + \frac{1}{2}i, R + \frac{1}{2}i, R + 0i, \text{ für } R > 0.$$

b) Bestimme die Singularitäten der Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ innerhalb Γ_R .

c) Berechne

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) dz.$$

d) Begründe, wieso

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + (R + iy)^2} dy = 0$$

gilt.

e) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (x + \frac{1}{2}i)^2} dx$$

unter Verwendung von c), d) und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \pi$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachte die Gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y = f(x, y) \\ \dot{y} &= -2x - x^2 + x^3 = g(x, y). \end{aligned}$$

a) Bestimme die Fixpunkte (x_j, y_j) , d.h. die Punkte (x, y) mit $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$.

b) Bestimme die Linearisierung $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$ in den Fixpunkten.
Mache Aussagen über die Stabilität der Fixpunkte.

c) Zeichne in der (x, y) -Ebene die Nulllinien

$$\begin{aligned} N_x &= \{(x, y) \mid \dot{x} = 0\} \quad \text{und} \\ N_y &= \{(x, y) \mid \dot{y} = 0\} \quad \text{ein.} \end{aligned}$$

d) Skizziere das Potential

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$$

der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -2x - x^2 + x^3$$

durch Einzeichnen der Extremstellen $(x_j, V(x_j))$.

e) Skizziere in der (x, y) -Ebene das Phasenbild, d.h. zeichne typische Lösungen in der (x, y) -Ebene ein.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, dem 01. April 2004, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html>

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 20. April 04, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S31 (Mathematikgebäude) statt.

Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 26. bis 30. April 2004.