UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. oec Norbert Breindl
Dipl.-Math. Oliver Zink

Frühjahr 2004
22.03.2004

**Lösung zur Diplomvorprüfung**

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Aufgabe 1** **a)** Die Differentialgleichung

$$\underbrace{-(x^3 + xy^2 - x^5 - x^3y^2)}_{P}\, dx + \underbrace{(x^2y + y^3)}_{Q}\, dy = 0$$

ist nicht exakt, da

$$P_y = -(2xy - 2x^3y) \quad \neq \quad 2xy = Q_x.$$

**b)** Polynomdivision liefert $(x^5 - x^3 + x^3y^2 - xy^2) : (x^2 + y^2) = \underbrace{x^3 - x}_{P}$, bzw. $(x^2y + y^3)\frac{1}{x^2+y^2} = \underbrace{y}_{Q}$.
Da $P_y = 0 = Q_x$ ist die Differentialgleichung

$$(x^3 - x)\, dx + y\, dy = 0$$

exakt. Wir suchen eine Funktion $F = F(x, y)$ mit $F_x = x^3 - x$ und $F_y = y$.

$$F(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C(y) \quad \Longrightarrow \quad F_y = C'(y) \quad \Longrightarrow C'(y) = y \quad \Longrightarrow C(y) = \frac{1}{2}y^2$$

Die Lösungskurven sind in impliziter Form gegeben durch

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C, \quad C = \text{const}$$

**c)** Die Abbildung, welche $z_1 = -i$, $z_2 = 0$ und $z_3 = i$ auf $w_1 = -1$, $w_2 = i$ und $w_3 = 1$ abbildet ergibt sich aus

$$\frac{(w - w_2)(w_3 - w_1)}{(w - w_1)(w_3 - w_2)} = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(w - i)2}{(w + 1)(1 - i)} = \frac{2iz}{(z + i)i},$$

und ist

$$w = \frac{-iz + i}{z + 1}.$$

Das Bild der imagiären Achse ist der Einheitskreis.

**Aufgabe 2** **a)** Setzen wir $z = e^{ix}$, so ist $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ und wir erhalten

$$\int_0^{2\pi} (\cos(x))^{80} = \int_{|z|=1} \left(\frac{z^2 + 1}{2z}\right)^{80} \frac{1}{iz}\, dz = \frac{2\pi}{2^{80}} \operatorname{Res}\left(\left(\frac{(z^2 + 1)^{80}}{z^{81}}\right), z_0 = 0\right) = \frac{1}{2^{79}} \binom{80}{40} \pi$$

Hinweis: $(a+b)^n = \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} a^j b^{n-j}$.

Das Residuum erhalten wir, indem wir den Koeffizienten für $j = 40$ bestimmen.

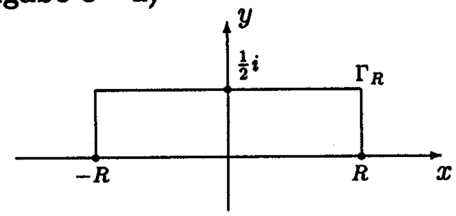
$$(z^2+1)^{80} = 1 + \ldots + \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \end{pmatrix} z^{80} + \cdots + z^{160}.$$

**b)** Setzen wir $z - 1 = u$, also $z = 1 + u$, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} \cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3}\left(1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \ldots\right) \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \ldots \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad f(z) = e^2 \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!}(z-1)^n.$$

**Aufgabe 3 a)**




**b)** Die Funktion $f$ besitzt Singularitäten bei $z_0 = \pm i$. Diese liegen jedoch außerhalb des geschlossenen Streckenzuges $\Gamma_R$.

**c)** Die Funktion $f$ ist mit Ausnahme der Singularitäten bei $z_0 = \pm i$ holomorph. Da diese jedoch außerhalb des geschlossenen Integrationsweg $\Gamma_R$ liegen, ist nach Cauchy-Integralsatz $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$.

**d)** Es ist $|y| < \frac{1}{2}$ und es sei $R > 1$. Dann gilt mit einer von $R$ und $y$ unabhängigen Konstante $C$

$$\left|\frac{1}{1+(R+iy)^2}\right| \leq \frac{C}{1+R^2}$$

Nach Lemma 3.2 gilt:

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\,dz\right| \leq L \max_{z \in [0,\frac{1}{2}]} |f(z)| \leq \frac{1}{2}\frac{C}{1+R^2} \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)$$

**e)** $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0 = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx - \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+(x+\frac{1}{2}i)^2}\,dx - \lim\limits_{R\to-\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{i}{1+(R+iy)^2}\,dy + \lim\limits_{R\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{i}{1+(R+iy)^2}\,dy$

$= \pi - \pi + 0 + 0,$

Damit folgt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x+\frac{1}{2}i)^2}\,dx = \pi$.

**Aufgabe 4 a)** Fixpunkte: $\dot{x} = y = 0$, $\dot{y} = 0 = -2x - x^2 + x^3 = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$
$\Longrightarrow P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$, $P_3 = (-1,0)$

**b)** Jacobi-Matrix für Linearisierung: $\mathbf{J}_{f,g}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2-2x+3x^2 & 0 \end{pmatrix}$

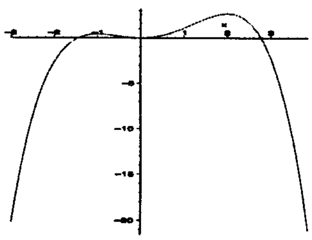
$P_1$ : $\quad \mathbf{J}_{f,g}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i \quad \Longrightarrow$ $P_1$ linear stabil, nichtlinear unklar,

$P_2$ : $\quad \mathbf{J}_{f,g}(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6} \quad \Longrightarrow$ $P_2$ ist Sattelpunkt und somit instabil,

$P_3$ : $\quad \mathbf{J}_{f,g}(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3} \quad \Longrightarrow$ $P_3$ ist Sattelpunkt und somit instabil.

**c)** Nulllinien: $N_x = \{y = 0\}$, $N_y = \{x = 0,\ x = 2,\ x = -1\}$

**d)** Potential $V(x)$ der Differentialgleichung $\ddot{x} = -2x - x^2 + x^3$.



**e)** Als Lösungskurven um $P_1$ ergeben sich geschlossene Kurven. Aus dem Potentialverlauf in d) ist zu entnehmen, dass der Sattelpunkt $P_3$ eine homokline Verbindung besitzt, dass Lösungskurven existieren die über $P_1$ hinweglaufen, aber nicht zu $P_2$ gelangen, sowie Lösungskurven, die über $P_1, P_2$ und $P_3$ hinweglaufen. Desweiteren existieren Lösungskurven die nicht an $P_2$ bzw. $P_3$ herankommen.