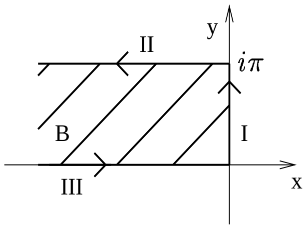
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2005
09.03.2005

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
— L ö s u n g e n —

Aufgabe 1

a)



$\zeta(z) = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$:

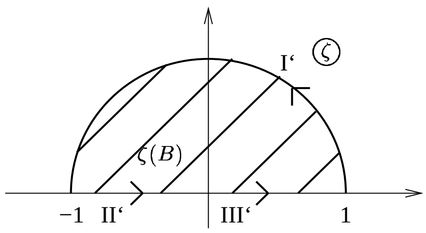
I: $z(t) = it \implies x(t) = 0,\ y(t) = t$ mit $0 \to t \to \pi \implies \zeta(z(t)) = e^{it}$ mit $0 \to t \to \pi$,

II: $z(t) = t + i\pi \implies x(t) = t$ mit $0 \to t \to -\infty$, $y(t) = \pi \implies \zeta(z(t)) = -e^t$ mit $0 \to t \to -\infty$,

III: $z(t) = t \implies x(t) = t$ mit $-\infty \to t \to 0$, $y(t) = 0 \implies \zeta(z(t)) = e^t$ mit $-\infty \to t \to 0$.

Aus der Orientierungstreue ergibt sich

$$\zeta(B) = \{\zeta \mid \operatorname{Im}\zeta \geq 0,\ 0 \leq |\zeta| \leq 1\}$$



b) Die Abbildung w kann als zusammengesetzte Abbildung $w(z) = \eta \circ \zeta(z) = \eta(\zeta(z))$ mit

$$\eta(\zeta) = \frac{\zeta + i}{\zeta - i} \qquad \text{(Möbius–Transformation)}\ ,$$

geschrieben werden. Wir bestimmen also $\zeta(B)$ durch $\eta(\zeta)$:

I‘: Die Polstelle $\zeta = i$ liegt auf I’, aber auch auf der imaginären Achse, die durch η auf die reelle Achse abgebildet wird. Das Bild von $\{|\zeta| = 1\}$ ist damit eine Gerade, die in $\eta(-i) = 0$ auf der reellen Achse senkrecht steht. Das Bild von $\{|\zeta| = 1\}$ ist die imaginäre Achse und $\eta(I‘)$ eine Teilmenge derselben.

II‘ + III‘: Die Geradenstücke II‘ und III‘ liegen auf der reellen Achse der ζ–Ebene. Da die reelle Achse durch $\eta(1) = i$ und $\eta(-1) = -i$ auf einen Kreis abgebildet wird, der auf der imaginären Achse senkrecht steht, erhalten wir als Bild in der

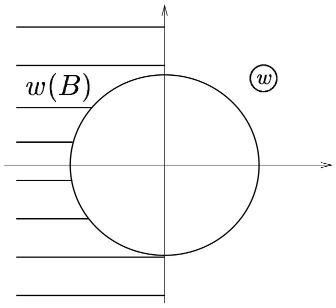
η–Ebene den Einheitskreis. Sowohl $\eta(II')$, als auch $\eta(III')$, sind also Teilmengen des Einheitskreises.

Für $\omega(B)$ stehen in der w–Ebene vier Bereiche zur Verfügung. Wegen

$$\eta(\frac{1}{2}\,i) = -3$$

ergibt sich

$$w(B) = \{w \mid \operatorname{Re} z \leq 0\,,\ |w| > 1\}\ .$$



Aufgabe 2

a) In der rechten Halbebene liegt nur die zweifache Polstelle $z = 1$ von f. Da

$$\begin{aligned} \text{Res }(f;1) &= \frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\to 1}\left(\frac{d}{dz}\,\frac{(z-i)e^{-z}}{(z+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{4e}\,(-1+2i)\ . \end{aligned}$$

erhalten wir mittels Residuensatz

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\ \text{Res }(f;1) = -\frac{\pi}{2e}\,(2+i)\ .$$

b) Wir zeigen, dass der Betrag des Integrals gegen 0 strebt. Mit

$$\Gamma_1 : z(\varphi) = Re^{i\varphi}, \quad -\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\,\pi,$$

ist eine Parameterdarstellung von Γ_1 gegeben. Da $R > 1$ und

$$\cos(\varphi) \geq 0 \ \text{ für } \ \varphi \in \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big] \quad \Longrightarrow \quad e^{-R\cos(\varphi)} \leq 1.$$

Wir setzen die Parameterdarstellung von Γ_1 ein, und erhalten mittels der üblichen Integralabschätzung

$$0 \leq \Big|\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz\Big| \leq \max_{z\in\Gamma_1}|f(z)|\cdot \text{Länge von } \Gamma_1,$$

und mit $R > 1$

$$\begin{aligned} 0 \leq \Big|\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz\Big| &\leq \frac{R+1}{(R^2-1)^2}\cdot R\pi \\ &\leq \pi\cdot\frac{2R^2}{R^4-2R^2} \leq \pi\cdot\frac{2}{R^2-2} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\max_{z\in\Gamma_1}|f(z)| \leq \frac{(|z|+1)e^{-\operatorname{Re} z}}{(|z|^2-1)^2} \leq \frac{|z|+1}{(|z|^2-1)^2} \leq \frac{R+1}{(R^2-1)^2}$$

c) Da

$$\left|\frac{(t-1)\cos t}{(t^2+1)^2}\right| \le \left|\frac{t+1}{t^4}\right| \le \frac{2}{|t^3|}, \qquad \left|\frac{(t-1)\sin t}{(t^2+1)^2}\right| \le \frac{2}{|t^3|},$$

ergibt sich für hinreichend große t Konvergenz von I_1 und I_2 gemäß dem Majoranten-kriterium.

d) Es gilt nach a)

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = -\frac{\pi}{2e}(2+i)\ .$$

Γ_2 läßt sich durch $z(t) = -it\,,\ -R \le t \le R$ parametrisieren. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} \frac{(it-i)(\cos t - i\sin t)}{(-t^2-1)^2}\,(-i)dt \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{(t-1)\cos t}{(t^2+1)^2}\,dt - i\int_{-R}^{R} \frac{(t-1)\sin t}{(t^2+1)}\,dt\end{aligned}$$

Führen wir den Grenzübergang $R \to \infty$ durch und beachten b), dann erhalten wir

$$I_1 - iI_2 = -\frac{\pi}{e} - i\frac{\pi}{2e} \quad\Longrightarrow\quad I_1 = -\frac{\pi}{e},\quad I_2 = \frac{\pi}{2e}.$$

Aufgabe 3

Ausgeschrieben liegt das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{2}{t^2}\,x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

vor.

a) Wir differenzieren die zweite Gleichung nach t:

$$\ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 = \frac{2}{t^2}x_2 \quad\Longrightarrow\quad t^2\ddot{x}_2 - 2x_2 = 0\ .$$

Dies ist eine homogene Eulersche Differentialgleichung:

Ansatz $(t>0)$: $x_2(t) = t^r \quad\Longrightarrow\quad r(r-1) - 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad r_1 = 2,\ r_2 = -1$

Allgemeine Lösung:

$$x_2(t) = C_1 t^2 + C_2\frac{1}{t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\ .$$

b) Aus dem System ergibt sich

$$x_1(t) = -\dot{x}_2(t) = -2C_1 t + C_2\,\frac{1}{t^2}.$$

Allgemeine Lösung des Systems für $t > 0$:

$$\vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix}-2t\\ t^2\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}\frac{1}{t^2}\\ \frac{1}{t}\end{pmatrix}.$$

c) $\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} -2C_1 + C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \implies C_1 = -1,\ C_2 = 1.$

Lösung des Anfangswertproblems für $t > 0$:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Entwicklung der linken Seite der DGL.:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + 4\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)c_{j+2}x^j + 4c_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(4-2j)c_j x^j \\
&= 4c_0 + 2c_2 + \sum_{j=1}^{\infty}\{(j+2)(j+1)c_{j+2} + (4-2j)c_j\}\, x^j
\end{aligned}$$

Entwicklung der rechten Seite der DGL.:

$$x^2 + xe^{-x^2} = x + x^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!} x^{2k+1}$$

Es folgt durch Koeffizientenvergleich:

i) $c_2 = -2c_0$

ii) $j = 1$: $\quad 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 2c_1 = 1$

iii) $j = 2$: $\quad 4 \cdot 3 \cdot c_4 = 1$

iv) $j = 2k+1,\ k \geq 1$: $\quad (2k+3)(2k+2)c_{2k+3} + (-4k+2)c_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{k!}$

$$\implies c_{2k+3} = \frac{1}{(2k+3)(2k+2)}\left(2(2k-1)c_{2k+1} + (-1)^k \frac{1}{k!}\right)$$

v) $j = 2k,\ k \geq 2$: $\quad (2k+2)(2k+1)c_{2k+2} + (4-4k)c_{2k} = 0$

$$\implies c_{2k+2} = \frac{4(k-1)}{(2k+2)(2k+1)}.$$

b) Mit $y(0) = \frac{1}{2} = c_0,\ y`(0) = 2 = c_1$ folgt aus a): $c_2 = -1,\ c_3 = -\frac{1}{2},\ c_4 = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$

$c_5 = \frac{1}{5 \cdot 4}\left(2c_3 - 1\right) = -\frac{1}{10}.$