**Diplom–Vorprüfung**
**Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen**
**Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**
**— L ö s u n g e n —**

## Aufgabe 1

a) Jede ganze lineare Transformation (Drehstreckung + Translation) bildet jeden Parallelstreifen wegen der Geradentreue auf einen Parallelstreifen ab.

Ansatz: $\xi(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
&\xi(0) = b = \pi i \Longrightarrow \xi(2i) = 2ai + \pi i = 2\pi i \\
&\Longrightarrow \; a = \frac{1}{2}\pi \\
&\Longrightarrow \; \xi(z) = \frac{1}{2}\pi z + \pi i
\end{aligned}$$

Aus der Konformität folgt, dass dieses $\xi(z)$ $G_z$ auf $G_\xi$ abbildet.

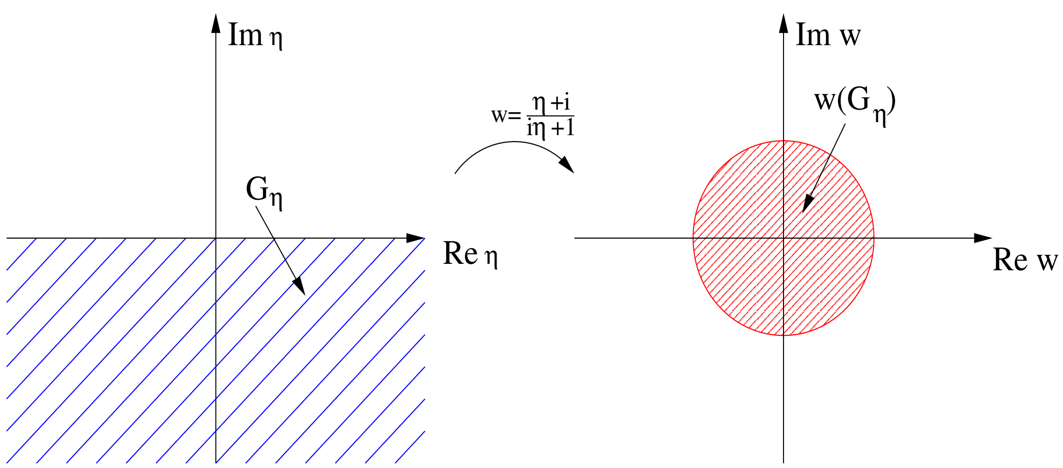
b) Bekanntlich bildet $\eta = e^\xi$ den Parallelstreifen $G_\xi$ auf die untere Halbebene $G_\eta$ ab. Damit ist die Komposition

$$\eta(z) = e^{\xi(z)} = e^{\frac{1}{2}\pi z + \pi i}$$

die gesuchte Abbildung.

c) Mit $\eta = it$, $t \in \mathbb{R}$ gilt $w(it) = i \cdot \dfrac{t+1}{1-t}$ .

Das Bild der imaginären Achse ist also wieder die imaginäre Achse. Deshalb schneidet das Bild der reellen Achse die imaginäre Achse in $w(0) = i$ senkrecht und außerdem in $w(\infty) = -i$. Damit ist das Bild der reellen Achse der Einheitskreis in der $w$–Ebene. Wegen $w(-i) = 0$ ist das Bild von $G_\eta$ das Innere des Einheitskreises in der $w$–Ebene.



**Aufgabe 2**

a) Wegen

$$\cos t \text{ stetig im } [0, 2\pi]\,, \cos t \leq 1 < \sqrt{2}$$

ist der Integrand stetig.

b) Mit

$$z = e^{it} \Longrightarrow \cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}),\ dt = \frac{dz}{iz}$$

ist wegen a)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(\sqrt{2} + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))^2 iz} \\ &= -4i\,\frac{z}{(z^2 + 2\sqrt{2}z + 1)^2} \end{aligned}$$

auf $\{|z| = 1\}$ holomorph und der Residuensatz ergibt

$$I = \int\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \text{ Res } (f(z); |z| < 1)\ .$$

Singularitäten von $f(z)$ in $\{|z| < 1\}$:

$$z^2 + 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \Longrightarrow z_{1,2} = -\sqrt{2} \pm 1$$

In $\{|z| < 1\}$ liegt nur $z_1 = -\sqrt{2} + 1$, und ist zweifache Polstelle.
Residum von $f$ in $z_1$:

$$\begin{aligned} \text{Res } (f, z_1) &= \lim_{z=z_1} \frac{d}{dz}(f(z)(z + \sqrt{2} - 1)^2) \\ &= \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left(-4i\frac{z}{(z + \sqrt{2} + 1)^2}\right) \\ &= \lim_{z \to z_1}\left(-4i \cdot \frac{-z + \sqrt{2} + 1}{(z + \sqrt{2} + 1)^3}\right) \\ &= -4i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} = -\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$I = 2\sqrt{2}\pi\ .$$

**Aufgabe 3**

Ausgeschrieben liegt das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

vor.

a) Wir differenzieren die erste Gleichung nach $t$:

$$\ddot{x}_1 = 3\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2 = 3\dot{x}_1 - 4(x_1 - x_2)$$

$$= 3\dot{x}_1 - 4(x_1 - \frac{1}{4}(3x_1 - \dot{x}_1))$$

$$\Longrightarrow \ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 + x_1 = 0$$

$$\Longrightarrow x_1(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad \text{allg. Lösung .}$$

b) Aus der ersten Gleichung folgt

$$x_2 = \frac{1}{4}(3x_1 - \dot{x}_1) = \frac{1}{4}(2C_1 - C_2)e^t + \frac{1}{2}C_2 t e^t$$

Allgemeine Lösung des Systems ($t \in \mathbb{R}$):

$$\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} C_1 \\ \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{4}C_2 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} C_2 \\ \frac{1}{2}C_2 \end{pmatrix}$$

c) Einsetzen der Anfangswerte ergibt $C_1 = 3$, $C_2 = 2$, damit ist

$$\vec{x}(t) = e^t \binom{3}{1} + te^t \binom{2}{1}$$

für $t \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems.

## Aufgabe 4

a) Normierung:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{12}{1-x^2}y = 0$$

Wegen (geometrische Reihe)

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} \ \text{ konvergent in } (-1,1)$$

sind die Koeffizienten in $(-1,1)$ regulär analytisch.

b) Mit

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j,\ y' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)c_{j+1}x^j,\ y'' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2}x^j$$

ergibt die Differentialgleichung

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2}x^j - \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2}x^{j+2}$$
$$-2\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}x^{j+1} + 12\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$
$$= 0\ .$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}2c_2 &+ 12c_0 \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\{(k+1)(k+2)c_{k+2} - (k(k+1)-12)c_k\}x^k = 0\ ,\end{aligned}$$

also

$$c_2 = -6c_0$$

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1)-12}{(k+1)(k+2)}c_k \text{ für } k \in \mathbb{N}\ .$$

Mit den Anfangsvorgaben

$$y(0) = 0 = c_0\ ,\ y'(0) = -\frac{3}{2} = c_1$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}&c_2 = 0 \Longrightarrow c_{2n} = 0 \text{ für } n \geq 2 \\ &c_3 = \frac{5}{2}\ ,\ c_5 = 0 \Longrightarrow c_{2n+1} = 0 \text{ für } n \geq 3\ .\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist das Polynom

$$y(x) = -\frac{3}{2}\,x + \frac{5}{2}\,x^3\ .$$