VD HM III F2006 Lösungen

Aufgabe 1

a) $\underbrace{(xy^2-y)}_{=P(x,y)}dx + \underbrace{x(xy-3)}_{=Q(x,y)}dy = 0$

$P_y = 2xy-1 \neq Q_x = 2xy-3$: $\underline{P_y \neq Q_x \text{ nicht exakt}}$

b) $(mP)_y \stackrel{!}{=} (mQ)_x$ bedeutet mit $m(x,y)=f(xy)$

wegen $m_x = yf'$, $m_y = xf'$:

$$f'(xy)\,(x\,P(x,y) - y\,Q(x,y)) = f\,(Q_x - P_y)$$

$$\underline{2xy\,f'(xy) = -2f(xy)}$$

$$\rightarrow \underline{f(xy) = m(x,y) = \frac{1}{xy}}$$

c) $\underline{x=0 \text{ und } y=0}$ sind Lösungen.

Die weiteren Lösungen erhält man mit b) durch Lösen der Gleichung $\frac{1}{xy}P(x,y)\,dx + \frac{1}{xy}Q(x,y)\,dy = \underline{(y-\frac{1}{x})dx + (x-\frac{3}{y})dy = 0}$

$F_x = y - \frac{1}{x} \rightarrow F(x,y) = xy - \ln|x| + \varphi(y) \rightarrow F_y = x - \frac{3}{y} = x + \varphi'(y)$

$\rightarrow \varphi(y) = -3\ln|y|$

also $\underline{F(x,y) = xy - \ln|x||y^3|}$

$\underline{\text{allgemeine Lösung in impliziter Form: } xy - \ln|xy^3| = \text{Const} = C}$

$\underline{C \text{ beliebig}}$

$\underline{x \neq 0,\ y \neq 0}$

$y(1) = 1 \rightarrow C = 1$: $\underline{\text{Lösung } xy - \ln(xy^3) = 1,\ x>0, y>0}$

$y(-1) = 1 \rightarrow C = -1$: $\underline{\text{Lösung } xy - \ln(-xy^3) = -1,\ x<0, y>0}$

$y(-1) = -1 \rightarrow C = 1$: $\underline{\text{Lösung } xy - \ln(xy^3) = 1,\ x<0, y<0}$

Aufgabe 2

Der Ansatz $y' = p(y)$ liefert $y'' = p'(y)\,y' = p'(y)\,p(y)$

und die DGL geht über in die DGL für $p(t)$:

$$t\,p(t)\,p'(t) = p(t)^2 - p(t)$$

Wegen $y'(0) = 2$ kommt $p(t) = 0$ als Lösung nicht in Frage, so dass für $p = p(t)$ die DGL

$$t\,p'(t) = p(t) - 1 \quad \text{bleibt}$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen.

Lösung $\underline{p(t) = ct + 1}$, $\underline{c = \text{konst}}$.

Die Lösung des gestellten Problems erhält man wegen obigen Ansatzes aus $\underline{y' = p(y) = cy + 1}$.

Mit $\underline{y(0) = 1,\ y'(0) = 2}$ gilt $2 = c + 1 \leadsto \underline{c = 1}$.

$$\underline{y'(x) = y(x) + 1 \qquad \text{linear inhomogen 1. Ordnung}}$$

$$\longleftrightarrow (e^{-x}y)' = e^{-x}$$

$\int_0^x$ mit $\underline{y(0) = 1}$ $\longrightarrow$ $e^{-x}y(x) - 1 = -e^{-x} + 1$

$$\longrightarrow \underline{y(x) = 2e^{x} - 1}$$

Aufgabe 3

a) $z = \pm 1$ sind Polstellen 1. Ordnung von f. Sie liegen innerhalb Γ: $|z-(3+4i)| = 10$:

$|1-(3+4i)|^2 = 4 + 16 = 20 < 100$,

$|-1-(3+4i)|^2 = 32 < 100$.

Mit dem Residuensatz gilt

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,-1))$$

$\mathrm{Res}(f,1) = \left.\frac{\cos \pi z}{-2z}\right|_{z=1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Res}(f,-1) = \left.\frac{\cos \pi z}{-2z}\right|_{z=-1} = -\frac{1}{2}$

Also: $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$

b) Es ist $x^4+5x^2+6 = (x^2+2)(x^2+3)$, so dass

$f(z) = \frac{1}{z^4+5z^2+6}$ keine reellen Polstellen hat.

Die Polstellen mit positivem Imaginärteil sind $z_1 = i\sqrt{2}$, $z_2 = i\sqrt{3}$.

Nach Vorlesung gilt (Nennergrad − Zählergrad $= 4 > 2$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+6} = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f, i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(f, i\sqrt{3}))$$

Da z_1, z_2 Polstellen 1. Ordnung sind:

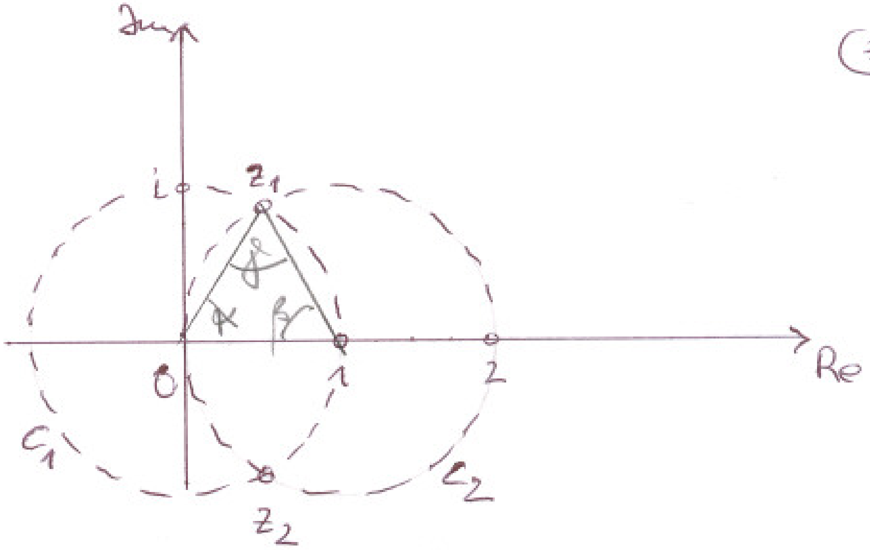
$\mathrm{Res}(f, i\sqrt{2}) = \left.\frac{1}{4z^3+10z}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{i2\sqrt{2}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$

$\mathrm{Res}(f, i\sqrt{3}) = \left.\frac{1}{4z^3+10z}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{-i2\sqrt{3}} = \frac{i}{2\sqrt{3}}$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+6} = 2\pi i\,\frac{i}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

VD HM III F2006 Lösungen

Aufgabe 4 (2)



$\Delta(0,1,z_1)$ ist gleichseitig $\to \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3} \to$ $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

gesucht ist eine Möbiustransformation (M-T). M-T bildet Kreise/Geraden ab auf Kreise/Geraden. Wir verwenden die Winkeltreue von M-T; wir verwenden, dass "∞" auf jeder Geraden liegt und dass "∞" auf keinem Kreis liegt.

a) Wir bilden z_1 nach ∞ ab: dann gehen C_1, C_2 in Geraden über
Wir bilden z_2 nach 0 ab: die Geraden schneiden sich in Null.

$\to$: $w = f(z) = \dfrac{z - e^{-i\frac{\pi}{3}}}{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}$ ist von der geforderten Form und liefert das Geforderte.

b) Skizze $\to$ Schnittwinkel der Bildgeraden in 0 $= \pi/3$.
(Begründung oben)

c) Alle Geraden und Kreise die durch z_1 gehen, werden auf Geraden abgebildet.
Alle Geraden und Kreise, die nicht durch z_1 gehen, werden auf Kreise abgebildet.

(Begründung oben)