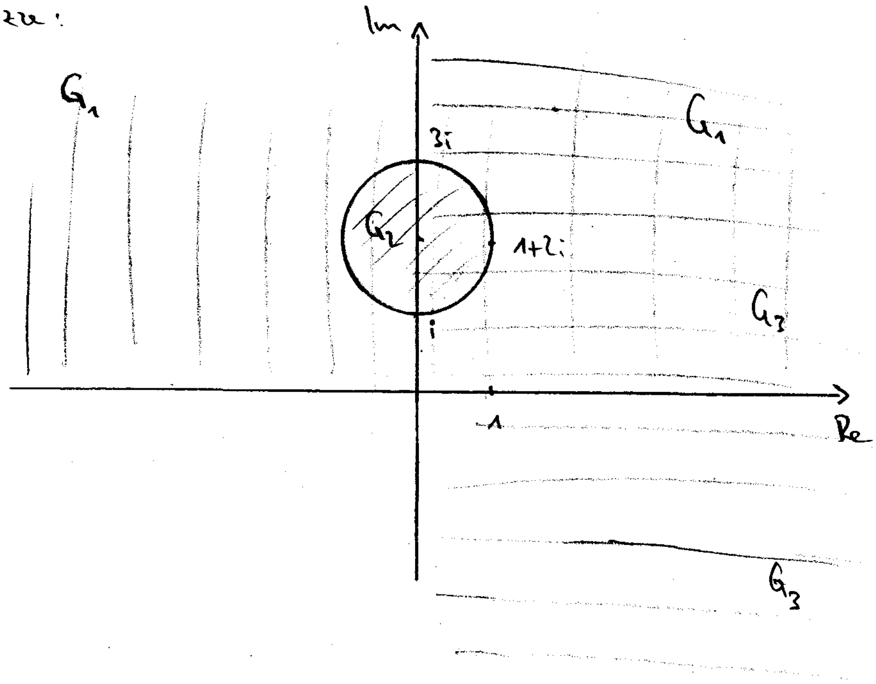
Höhere Mathematik III

Lösungen zur Vordiplomklausur

① a) G_1 : obere Halbebene, G_2 : Inneres des Kreises mit Radius 1 um den Punkt $2i$, G_3 : rechte Halbebene, da $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$.

Skizze:



b) Mit $z_1 = i$, $z_2 = 1+2i$, $z_3 = 3i$,

$$T_1(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1},$$

$$T_2(z) = 2z = \frac{2\cdot z+0}{0\cdot z+1}$$

und $T_3(z) = z-1 = \dfrac{z-1}{0\cdot z+1}$

ist T gegeben durch $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$.

Wir erhalten

$$T(z) = T_3 \circ T_2 \left(\frac{z-i}{z-3i} \cdot \frac{1-i}{1+i} \right)$$

$$= T_3 \circ T_2 \left(\frac{z-i}{z-3i} \cdot \frac{(1-i)^2}{2} \right)$$

$$= T_3 \circ T_2 \left(\frac{z-i}{z-3i} \cdot \frac{(-2i)}{2} \right)$$

$$= T_3 \left(\frac{-2iz-2}{z-3i} \right)$$

$$= \frac{-2iz-2}{z-3i} - \frac{z-3i}{z-3i}$$

$$= \frac{(-2i-1)z-2+3i}{z-3i}$$

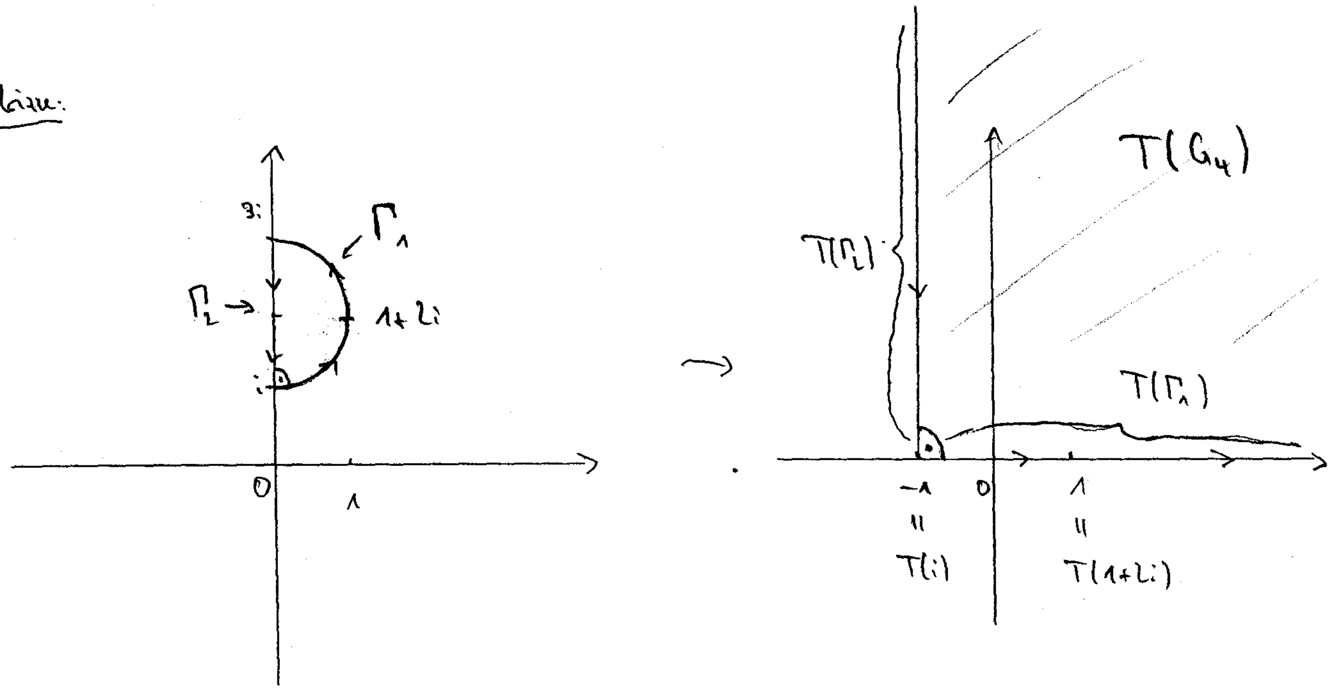
c) Da Möbiustransformationen kreistreu sind, gilt $T(\partial G_2) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wegen $T(i) = -1$, $T(1+2i) = 1$ und $T(3i) = \infty$.

Orientiert man ∂G_2 mithilfe der Punkte i, $1+i$ und $3i$, so liegt G_2 zur Linken des in dieser Reihenfolge orientierten Randes ∂G_2.

Da Möbiustransformationen orientierungstreu sind, liegt $T(G_2)$ ebenfalls zur Linken des durch $T(i) = -1$, $T(1+2i) = 1$, $T(3i) = \infty$ orientierten Randes $\partial T(G_2) = T(\partial G_2) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Also $T(G_2) = G_1$.

Skizze:



Es sei $\Gamma_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0 \}$

sowie $\Gamma_2 = \{ z \in \mathbb{C} : z = ti \ (t \in [1,3]) \}$

Dann ist $T(\Gamma_1) = \{ z \in \hat{\mathbb{C}} : z \in [-1, \infty] \}$

Das Geradenstück Γ_2 geht aufgrund der Kreistreue von T und $T(3i) = \infty$ mittels der Abbildung T über in ein Geradenstück von -1 nach ∞. Dieses verläuft in $\overline{G_1}$.

Da sich Γ_1 und Γ_2 in i rechtwinklig schneiden, tun dies auch $T(\Gamma_1)$ und $T(\Gamma_2)$ im Punkt -1.

Daher ist $T(\Gamma_2) = \{ z \in \hat{\mathbb{C}} : z = -1 + ti \quad (t \in [0, \infty]) \}$,

und somit $\partial T(G_4) = T(\partial G_4) = T(\Gamma_1) \cup T(\Gamma_2)$.

Da G_4 links des durch $i, 1+2i, 3i$ orientierten Randes ∂G_4 liegt, ist dies auch bei $T(G_4)$ bezüglich $-1, 1, \infty, -1$ der Fall, und daher ist

$$T(G_4) = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1, \operatorname{Im} z > 0 \}.$$

(2)

a) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt ,$$

wobei $R(x,y) := \dfrac{1}{2-y}$ eine rationale Funktion in x und y ist, und die Abbildung $t \to R(\sin t, \cos t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ stetig ist.

Damit gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\, dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z} \right) dz$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z \cdot \left(2 - \frac{z^2+1}{2z}\right)}\, dz$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2z - \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}}\, dz$$

$$= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{4z - z^2 - 1}\, dz$$

$$= 2i \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - 4z + 1}\, dz$$

NR: $$z_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

$$= 2i \int_{|z|=1} \underbrace{\frac{1}{(z-2-\sqrt{3})(z-2+\sqrt{3})}}_{=:f(z)} \, dz$$

$$= 2i \cdot 2\pi i \; \mathrm{Res}(f, 2-\sqrt{3})$$

Residuensatz, da $1 < 2+\sqrt{3}$ und

$$0 = 2-2 < 2-\sqrt{3} < 2-1 = 1$$

$$= -4\pi \cdot \lim_{z \to 2-\sqrt{3}} \frac{1}{z-2-\sqrt{3}}$$

$$= -4\pi \, \frac{-1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

b)

Es sei $f(z) = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$.

Die Singularitäten von f sind die Nullstellen der Funktion $z \mapsto \sinh z$:

$$\sinh z = 0 \iff \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = 0$$

$$\iff e^{z} = e^{-z} \qquad \iff e^{2z} = 1$$

$$\iff z = k\pi i \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen $3 < \pi$ liegt die einzige Singularität innerhalb von $\{ z \in \mathbb{C} : |z| = 3 \}$ an der Stelle $z_0 = 0$ vor.

Mit Hilfe des Residuensatzes erhält man

$$\int_{|z|=3} \frac{\cosh z}{\sinh z} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0)$$

$$\underset{(*)}{=} 2\pi i \left. \frac{\cosh z}{(\sinh z)'} \right|_{z=0}$$

$$= 2\pi i$$

(*) f besitzt an der Stelle 0 einen Pol 1. Ordnung, da

$0 \neq \cosh(0) = (\sinh z)'|_{z=0}$

und $0 = \sinh(0)$.

Frühjahr 2007

(3) $P(x,y) = 10x^2y + 2y^3$, $Q(x,y) = 2x^3 + 10xy^2$

a) $P_y(x,y) = 10x^2 + 6y^2$

$$\left.\begin{array}{l} P_y(x,y) = 10x^2 + 6y^2 \\ \neq \\ Q_x(x,y) = 6x^2 + 10y^2 \end{array}\right\} \text{ Dgl nicht exakt}$$

b) Ansatz für integrierenden Faktor $\mu = \mu(x^2+y^2)$.

Es soll gelten: $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$, also

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \quad \text{und somit}$$

$$2y\,\mu'(x^2+y^2)\,[10x^2y + 2y^3] + \mu(x^2+y^2)\,(10x^2+6y^2)$$

$$\stackrel{!}{=} 2x\,\mu'(x^2+y^2)\,[2x^3 + 10xy^2] + \mu(x^2+y^2)\,(6x^2+10y^2).$$

Wir erhalten

$$\mu'(x^2+y^2)\,[20x^2y^2 + 4y^4 - 4x^4 - 20x^2y^2]$$

$$\stackrel{!}{=} \mu(x^2+y^2)\,[6x^2 + 10y^2 - 10x^2 - 6y^2],$$

also

$$\mu'(x^2+y^2)\cdot 4(y^4-x^4) \stackrel{!}{=} \mu(x^2+y^2)\cdot 4(y^2-x^2)$$

also für $y \neq \pm x$ (diese sind keine Lösungen der Dgl)

$$\mu'(x^2+y^2)\,(x^2+y^2) = \mu(x^2+y^2)$$

und mit $x^2+y^2 = t$

ergibt sich die reparierende Dgl $\mu' = \frac{1}{t}\mu$ für $t \neq 0$

und daher $\int \frac{1}{\mu}\, d\mu = \int \frac{1}{t}\, dt$, also

$$\ln \mu = \ln t + C .$$

Es ist $\mu(t) = t$ eine Lösung, und somit $\mu(x^2+y^2) = x^2+y^2$ ein integrierender Faktor, denn es gilt:

$$P(x,y)\,\mu(x,y) = (10x^2y + 2y^3)(x^2+y^2)$$
$$= 10x^4y + 12x^2 y^3 + 2y^5$$

und

$$Q(x,y)\,\mu(x,y) = (2x^3 + 10xy^2)(x^2+y^2)$$
$$= 10xy^4 + 12y^2x^3 + 2x^5$$

also $(P\mu)_y = 10x^4 + 36x^2y^2 + 10y^4$

$$= (Q\mu)_x .$$

c) Gesucht ist eine Funktion F mit $F_x = \mu P$, $F_y = \mu Q$.

Die Funktion $F(x,y) = 2x^5y + 2y^5x + 4y^3x^3 + C$

$$= 2xy\,[x^4 + 2x^2y^2 + y^4] + C$$
$$= 2xy\,(x^2+y^2)^2 + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

erfüllt diese Bedingungen

Die Lösungen der Dgl sind in impliziter Form gegeben durch

$$xy(x^2+y^2) = C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

4

a) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}.$$

Einsetzen in Dgl:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\, a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 9\, a_n\, x^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 3(n-1)\, a_{n-1}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 9\, a_{n-1}\, x^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2a_2 + (6a_3 - 9a_0)\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 3(n-1)\, a_{n-1} - 9a_{n-1} \right] = 0.$$

Also gilt

$$a_{n+2} = \frac{(3(n-1) + 9)\, a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \qquad (n \geq 2)$$

$$= \frac{(3n+6)\, a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} = \frac{3\, a_{n-1}}{(n+1)} \qquad (n \geq 2)$$

und somit

$$(*) \quad a_{n+3} = \frac{3\, a_n}{n+2} \qquad (n \geq 1).$$

Wegen $6a_3 - 9a_0 = 0$ bzw. $a_3 = \frac{3a_0}{2+0}$

gilt die Formel (*) für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b)

Es ist $a_0 = y(0) = 0$, $a_1 = \frac{1}{1!} y'(0) = 1$,

$a_2 = \frac{1}{2!} y''(0) \underset{\text{Dgl.}}{=} \frac{1}{2}\left(3 \cdot 0 \cdot y'(0) + 9 \cdot 0 \cdot y(0)\right) = 0$.

$a_3 \underset{a)}{=} \frac{3}{2} a_0 = 0$

$a_4 \underset{a)}{=} \frac{3}{3} a_1 = 1$

$a_5 \underset{a)}{=} \frac{3}{4} a_2 = 0$.

c) Per Induktion: $a_0 = 0$, $a_1 = 1 = \frac{1}{0!}$, $a_2 = 0$.

<u>Induktionsschritt:</u> $n \to n+1$

1. $n = 3k$: $a_{3(k+1)} = a_{3k+3} \underset{a)}{=} \frac{3}{3k+2} a_{3k} \underset{(IV)}{=} 0$

2. $n = 3k+2$: $a_{3(k+1)+2} = a_{(3k+2)+3}$

$\underset{a)}{=} \frac{3}{(3k+2)+2} a_{3k+2} \underset{(IV)}{=} 0$

3. $n = 3k+1$:

$a_{3(k+1)+1} = a_{(3k+1)+3} = \frac{3}{(3k+1)+2} a_{3k+1}$

$$= \frac{3}{3(k+1)} a_{3k+1} \underset{(IV)}{=} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$$

d)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{c)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^3)^k = x e^{x^3}.$$

mit $y(0) = 0$,

$$y'(x) = e^{x^3} + x e^{x^3} (3x^2) = e^{x^3} + 3x^3 e^{x^3}$$

mit $y'(0) = 1$,

$$y''(x) = 3x^2 e^{x^3} + 9x^2 e^{x^3} + 3x^3 e^{x^3} 3x^2$$

$$= 3x^2 e^{x^3} + 9x^5 e^{x^3} + 9x^2 e^{x^3}$$

$$= 3x^2 y'(x) + 9x y(x).$$