Aufgabe 1

a) Gesucht ist $f = u + iv$, holomorph für $z \neq 0$, $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$.
Gegeben ist $v(x,y) = x - \frac{x}{x^2+y^2}$. Gesucht ist $u(x,y)$ mit

$$D_1 u(x,y) = D_2 v(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad D_2 u(x,y) = -D_1 v(x,y) = -\left(1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + h(y) \longrightarrow \underbrace{D_2 u(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + h'(y)}$$

$$\longrightarrow h'(y) = -1, \quad h(y) = -y + c$$

und also: $u(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} - y + c \quad (c \text{ konst} \in \mathbb{R})$

$$\longrightarrow f(x+iy) = -\frac{y}{x^2+y^2} - y + c + ix - i\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \longrightarrow \quad w &= f(z) = i\left(z - \frac{1}{z}\right) + c \\ f(1) &= c = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underline{w = f(z) = i\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

b) $\underline{f(z_1) - f(z_2) = i(z_1 - z_2)\left(1 + \frac{1}{z_1 \cdot z_2}\right)}$

Man liest ab, dass aus $z_1 \neq z_2$ und $|z_1| > 1$, $|z_2| > 1$ folgt: $f(z_1) \neq f(z_2)$,

denn aus $\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = -1$ würde $z_1 = -\frac{1}{z_2}$ und
damit der Widerspruch $\left|\frac{1}{z_2}\right| > 1$ zu $|z_2| < 1$ folgen.
Also ist f für $|z| > 1$ schlicht: da injektiv und holomorph

c) Nach Vorlesung gilt

$$A(f(G)) = \iint_G |f'(x+iy)|^2 \, d(x,y) \underset{\uparrow}{=} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=1}^{R} |f'(re^{i\varphi})| r \, dr \, d\varphi$$

Polarkoordinaten

noch Aufgabe 1

$$f'(z) = i\left(1+\frac{1}{z^2}\right), \quad |f'(re^{i\varphi})|^2 = \left(1+\frac{1}{r^2}e^{-i2\varphi}\right)\left(1+\frac{1}{r^2}e^{i2\varphi}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{r^4}+\frac{2}{r^2}\cos 2\varphi$$

$$I(f(G)) = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=1}^{R}\left(r+\frac{1}{r^3}+\frac{2}{r}\cos 2\varphi\right)dr\,d\varphi$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}(R^2-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2}-1\right)\right)$$

$$= \underline{\pi\frac{1}{2}\left(R^2-\frac{1}{R^2}\right)}$$

noch <u>Aufgabe 1</u>

$$f'(z) = i\left(1+\frac{1}{z^2}\right), \quad |f'(re^{i\varphi})|^2 = \left(1+\frac{1}{r^2}e^{-i2\varphi}\right)\left(1+\frac{1}{r^2}e^{i2\varphi}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{r^4}+\frac{2}{r^2}\cos 2\varphi$$

$$I(f(G)) = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=1}^{R}\left(r+\frac{1}{r^3}+\frac{2}{r}\cos 2\varphi\right)dr\,d\varphi$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}(R^2-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2}-1\right)\right)$$

$$= \underline{\pi\frac{1}{2}\left(R^2-\frac{1}{R^2}\right)}$$

HM III 17.3.2009 Lösungen

Aufgabe 2

a) $f(z) = \dfrac{1-z}{1+2z} = \dfrac{1-z}{3+2(z-1)} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1-z}{1+\frac{z-1}{3/2}}$

geometrische Reihe $|z-1| < 3/2$

$$\overset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{1}{3}(1-z)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k(z-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^k}{3^{k+1}}(z-1)^{k+1}, \quad r = \frac{3}{2}$$

b) Anwendung des Residuensatzes.

$f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ hat in $z=-2$ eine wesentliche Singularität. $\operatorname{Res}(f(z), z=-2)$ wird aus der Laurentreihe abgelesen:

$$f(z) = (-5+z+2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2k} - 5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2k+1}$$

$\to \operatorname{Res}(f(z), z=-2) = -5$

$\to \displaystyle\oint_{|z-1|=4} f(z)\,dz = -10\pi i$ ($z=-2$ liegt innerhalb des Kreises $|z-1|=4$)

$z=-2$ liegt außerhalb Γ $\to$ f ist holomorph in Umgebung des Rechtecks, das Γ als Rand hat $\to$ (Cauchy Integralsatz)

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

HM III 17.3.2009 Lösungen

Aufgabe 3

Wir berechnen y aus der Gleichung $y' = p(y)$, wobei

$p = p(t)$ der Gleichung

$$p(t)p'(t) + 6t\,(p(t))^3 = 0$$ genügt.

$p(t) = 0$ würde $y(x) = \text{const}$ bedeuten. Das geht wegen der Anfangsbedingungen nicht.

$$\longrightarrow \quad p'(t) + 6t\,p^2(t) = 0$$

Mit $v(t) = \frac{1}{p(t)}$ erhält man: $-\frac{1}{v^2}v' + 6t\frac{1}{v^2} = 0$

$$\rightarrow v' = 6t$$

$$v(t) = \frac{1}{p(t)} = 3t^2 + c_1$$

$\rightarrow \quad \frac{1}{y'(x)} = 3y^2(x) + c_1$ mit $y'(0) = \frac{1}{3}$, $y(0) = 1$ folgt $c_1 = 0$,

also: $\underline{p(t) = \frac{1}{3t^2}}$

so dass y aus

$$y'(x) = \frac{1}{3y^2(x)}$$ zu berechnen ist.

$$\rightarrow \quad y^3(x) = x + c_2 \xrightarrow{y(0)=1} c_2 = 1$$

also: $\underline{y(x) = \sqrt[3]{x+1} \quad (x \neq -1)}$

HM III 17.3.2009 Lösungen

Aufgabe 4

Setze den Ansatz $y(x)=x^a$ ($x>0$, $a\in\mathbb{R}$) in die homogene DGL ein:

$$a(a-1)x^a+(1+x^2)ax^a-(1-x^2)x^a=0$$

$$(a^2-1)+x^2(a+1)=0$$

Das ist für alle $x>0$ nur durch $a=-1$ erfüllbar.

$y_1(x)=x^{-1}$ ist Lösung der homogenen DGL.

Ansatz $y(x)=\frac{1}{x}v(x)$ für die vorgelegte DGL.

Man erhält für v' die lineare inhomogene DGL 1. Ordnung:

$$(*)\qquad (v')'(x)+\left(x-\frac{1}{x}\right)v'(x)=2x^2$$

$x-\frac{1}{x}$ liefert den integrierenden Faktor $m(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{2}x^2}$

Multipliziere $(*)$ mit $m(x)$:

$$\left(v'(x)\frac{1}{x}e^{\frac{x^2}{2}}\right)'=2xe^{\frac{1}{2}x^2}=\left(2e^{\frac{1}{2}x^2}\right)'$$

$$\rightarrow\qquad v'(x)=2x+c_1xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\rightarrow\qquad v(x)=x^2-c_1e^{-\frac{x^2}{2}}-c_2$$

also:

$$y(x)=x-\frac{1}{x}\left(c_1e^{-\frac{1}{2}x^2}+c_2\right),\quad x>0$$

mit beliebigen Konstanten c_1, c_2.

y ist die allgemeine Lösung der vorgelegten DGL.