Lösung zur Klausur, WS 2009/2010

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Bestimmen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem des folgenden homogenen Differentialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Lösung $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ des obigen Systems mit

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) - 1 - 6 + 3(2-\lambda) - (-1-\lambda) + 2(3-\lambda) \\ &= -6 + 2\lambda - 6\lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda - \lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 6 - 4\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda \\ &= (-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) \\ &= (-\lambda)((\lambda-2)^2 + 1) \\ &= (-\lambda)(\lambda - (2+i))(\lambda - (2-i)). \end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind also 0, $2+i$, $2-i$. Das sind bekanntlich dann auch die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix. Wegen $\overline{2+i} = 2-i$ genügt es, die Eigenräume zu den Eigenwerten 0 und $2+i$ zu berechnen.

Eigenwert 0 :

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Eigenwert $2+i$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -i & -1 & -1 \\ 2 & -3-i & -1 \\ -1 & 3 & 1-i \end{pmatrix} &= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ 0 & -3+i & -1+2i \\ 0 & 3-i & 1-2i \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ 0 & -3+i & -1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Wir zerlegen nun die komplexwertige Lösung $e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in Real- und Imaginärteil. Es gilt
$$e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ -\sin t - \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$
Ein reelles Fundamentalsystem ist dann gegeben durch

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ -\sin t - \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir die spezielle Lösung mit dem Anfangswert $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es soll also gelten

$$y(0) = a\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also folgendes LGS lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Das ist gleichbedeutend mit
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right).$$
Daraus folgern wir $a = -1$, $b = 2$, $c = 1 + 2 = 3$.
Also lautet die gesuchte Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ -\sin t - \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + 3e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$3y(y')^2 - (1+y^2)y'' = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Hinweis: $\displaystyle\int \frac{ds}{(1+s^2)^{3/2}} = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}.$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(y^2 + x)dx + ydy = 0, \qquad y(-\frac{1}{2}) = 1.$$

und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall der Lösung.

a) Es handelt sich um eine implizite Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\Phi(y, y', y'') = 0 \quad (\text{mit } \Phi(a,b,c) := 3ab^2 - (1+a^2)c).$$

Wir berechnen zunächst $p(t)$ aus $\Phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0$ und danach $y(x)$ aus $y'(x) = p(y(x))$. Im Hinblick auf den zweiten Schritt gilt insbesondere $p(0) = p(y(0)) = y'(0) = 1$.
Schritt 1: Wegen $p(0) = 1$ verschwindet p zumindest auf einer kleinen Umgebung von 0 nicht und aus $\Phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 3tp(t)^2 - (1+t^2)\dot{p}(t)p(t) = 0$ folgt dort dann $3tp(t) - (1+t^2)\dot{p}(t) = 0$ und weiter $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \frac{3t}{1+t^2}$. Also gilt $p(t) = c(1+t^2)^{3/2}$ (mit $c \in \mathbb{R}$) und aus $p(0) = 1$ folgt $c = 1$.
Schritt 2: Wir lösen nun $y'(x) = p(y(x))$ mittels Trennung der Variablen. p verschwindet auf $\mathbb{R}$ nicht und gemäß Hinweis ist $P(t) := \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ eine Stammfunktion von $1/p$. Aus $\frac{y'}{p(y)} = 1$ erhalten wir die Lösung y zunächst in impliziter Form: $P(y(x)) = x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Aus $y(0) = 0$ folgt $C = P(0) = 0$. Schließlich lösen wir $P(y(x)) = \frac{y(x)}{\sqrt{1+y(x)^2}} = x$ noch nach y auf: Es folgt $y^2 = x^2(1+y^2)$ und daraus $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$. Wegen $y'(0) = 1$ kann dies nur für $y(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ gelten (Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$).

b) Wir setzen $P(x,y) = y^2 + x$ und $Q(x,y) = y$. (Die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ ist nicht exakt, denn $P_y = 2y \neq 0 = Q_x$.) Wir probieren, ob es einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$ gibt:

$$\begin{aligned}
(P\mu)_y = P_y\mu = 2y\mu &\overset{!}{=} (Q\mu)_x = Q_x\mu + Q\mu' = y\mu' \\
&\rightsquigarrow 2y\mu = y\mu' \\
&\rightsquigarrow \mu' = 2\mu \\
&\rightsquigarrow \mu(x) = ke^{2x}
\end{aligned}$$

Tatsächlich ist also $\mu(x) = e^{2x}$ ein integrierender Faktor. Wir bestimmen nun eine Stammfunktion der exakten Differentialgleichung $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$
Aus $F_y = \mu Q = e^{2x}y$ folgt $F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}y^2 + C(x)$ (mit einer Funktion $C = C(x)$). Somit muß $e^{2x}y^2 + C'(x) = F_x \overset{!}{=} \mu P = e^{2x}(y^2 + x)$ gelten, also $C'(x) = e^{2x}x$. Es ist $\int e^{2x}xdx = \frac{1}{2}e^{2x}x - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}x - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{2})$.

Also ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form gegeben durch

$$F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}(y^2 + x - \frac{1}{2}) = c.$$

Aus $y(-1/2) = 1$ folgt $c = 1/2 \cdot e^{-1}(1 + 1/2 - 1/2) = 0$. Also gilt $1/2 \cdot e^{2x}(y^2 + x - 1/2) = 0$ und damit $y^2 = -x + 1/2$. Wegen $y(-1/2) = 1 > 0$ folgt daraus $y(x) = \sqrt{-x + 1/2}$ und diese Lösung existiert offensichtlich auf $(-\infty, 1/2)$.

Aufgabe 3 Lösen Sie mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$y'' + \frac{x}{2}y' - y = 34 + \frac{x}{2}\sinh x\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

Wir machen wie gefordert einen Potenzreihenansatz; es gilt also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \qquad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}\,.$$

(Wegen der Anfangsbedingungen kennen wir schon die Koeffizienten $c_0 = y(0) = 1$ und $c_1 = y'(0) = 0$.) Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
y'' + \frac{x}{2}y' - y &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= (0+2)(0+1)c_{0+2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big((k+2)(k+1)c_{k+2} + \frac{1}{2}k c_k - c_k\Big)x^k - c_0 \\
&= -c_0 + 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big((k+2)(k+1)c_{k+2} + (\frac{k}{2} - 1)c_k\Big)x^k\,.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht

$$34 + \frac{x}{2}\sinh x = 34 + \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} = 34 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2(2n+1)!}\,x^{2n+2}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also zum einen

$$-c_0 + 2c_2 = 34\,,$$

woraus wegen $c_0 = 1$ unmittelbar $c_2 = 35/2$ folgt, zum anderen

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\frac{k}{2} - 1)c_k = \begin{cases} 0\,, & k = 2n+1, \\ \frac{1}{2(2n+1)!}\,, & k = 2n+2 \end{cases} \qquad (n \geq 0).$$

Aus der ersten Zeile hiervon ergibt sich die Rekursionsvorschrift

$$c_{2n+3} = \frac{(1/2 - n)}{(2n+3)(2n+2)}c_{2n+1} \qquad (n \geq 0)\,.$$

Wegen $c_1 = 0$ folgt $c_3 = c_5 = c_7 = \cdots = 0$. Die zweite Zeile liefert

$$c_{2n+4} = \frac{-nc_{2n+2} + \frac{1}{2(2n+1)!}}{(2n+4)(2n+3)} \qquad (n \geq 0)\,.$$

Es ergeben sich dann die Werte
$c_4 = \frac{\frac{1}{2}}{4\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$

$c_6 = \frac{-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}}{6\cdot 5} = \frac{\frac{-1+2}{2\cdot 3\cdot 4}}{5\cdot 6} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$
$c_8 = \frac{-\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}{8\cdot 7} = \frac{\frac{-2+3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}}{8\cdot 7} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$
und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \qquad (n \geq 2)\,,$$

die wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Ist die Formel für $n := \nu + 1 \geq 2$ bewiesen (IV), so folgt

$$\begin{aligned} c_{2(n+1)} = c_{2\nu+4} &= \frac{-\nu c_{2\nu+2} + \frac{1}{2(2\nu+1)!}}{(2\nu+4)(2\nu+3)} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{-\nu\frac{1}{(2\nu+2)!} + \frac{1}{2(2\nu+1)!}}{(2\nu+4)(2\nu+3)} \\ &= \frac{\frac{-\nu+(\nu+1)}{(2\nu+2)!}}{(2\nu+4)(2\nu+3)} \\ &= \frac{1}{(2\nu+4)!} = \frac{1}{(2(n+1))!}\,. \end{aligned}$$

Die Formel gilt dann also auch für $n+1$.
Wir fassen die gefundenen Ergebnisse zusammen:

$$c_{2n+1} = 0 \quad (n \geq 0)\,, \qquad c_0 = 1\,, \quad c_2 = 35/2\,, \quad c_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \quad (n \geq 2)\,.$$

Wir überlegen uns, daß $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\,x^{2n} = 1 + x^2/2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n}\,x^{2n}$, also $\sum_{n=2}^{\infty} c_{2n}\,x^{2n} = -1 - x^2/2 + \cosh x$ gilt. Damit haben wir die Lösung des Anfangswertproblems ermittelt:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n = 1 + 35/2\cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n}\,x^{2n} = 1 + 35/2\cdot x^2 - 1 - x^2/2 + \cosh x = 17x^2 + \cosh x.$$

Aufgabe 4 Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x\partial_x u - y\partial_y u = xy^2$$

in D und bestimmen Sie die Lösung $u = u(x,y)$ dieser Differentialgleichung, die der Bedingung

$$u(\xi,\xi) = 0 \text{ für alle } \xi > 0$$

genügt. Wie sehen die Grundcharakteristiken aus?
Skizzieren Sie in der (x,y)-Ebene die Kurve Γ, auf der die Anfangswerte vorgegeben sind, sowie einige Grundcharakteristiken.
Überprüfen Sie, ob Ihre Berechnung tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung geliefert hat.
Auf welcher Teilmenge von D ist die von Ihnen berechnete Lösung erklärt?

Das charakteristische System der gegebenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s) \\ k_2'(s) &= -k_2(s) \\ w'(s) &= k_1(s)k_2(s)^2. \end{aligned}$$

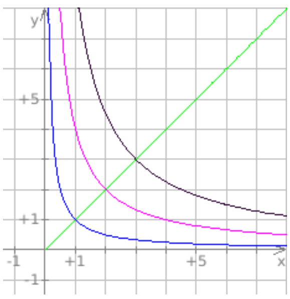
Die Kurve für die Anfangswerte ist parametrisiert durch $\xi > 0$. Zu festem $\xi > 0$ lauten die Anfangswerte für das charakteristische System:

$$\begin{aligned} k_1(0) &= \xi \\ k_2(0) &= \xi \\ w(0) &= 0. \end{aligned}$$

Für festes $\xi > 0$ erhält man als eindeutige Lösung der ersten beiden Gleichungen die Grundcharakteristik

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ \xi e^{-s} \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Wir bemerken, daß $k_1(s,\xi)k_2(s,\xi) = \xi^2$ gilt. Die zugehörige Grundcharakteristik ist also eine Hyperbel durch (ξ,ξ) (d.h. ihr Bild stimmt mit dem Graphen von $x \mapsto \xi^2/x$ überein).
Außerdem ist $\Gamma = \{(\xi,\xi) : \xi > 0\}$.
Skizze (grün: Γ, blau: $\xi = 1$, lila: $\xi = 2$, schwarz: $\xi = 3$):



Berechnung der Lösung: Es ist klar, dass durch jeden Punkt $(x,y) \in D$ genau eine Grundcharakteristik verläuft. Dabei gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{k}(s,\xi) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ \xi e^{-s} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \xi = \sqrt{xy} \text{ und } s = \ln\frac{x}{\xi} = \ln\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Also ist

$$u(x,y) = w(s,\xi)|_{s=\ln\sqrt{\frac{x}{y}},\,\xi=\sqrt{xy}}.$$

Aus $\frac{d}{ds}w(s,\xi) = k_1(s)k_2(s)^2 = \xi^3 e^{-s}$ und $w(0,\xi) = 0$ folgt

$$w(s,\xi) = \xi^3(1-e^{-s}).$$

Man erhält

$$u(x,y) = (xy)^{3/2}(1-e^{-\ln\sqrt{\frac{x}{y}}}) = (xy)^{3/2} - (xy)^{3/2}\sqrt{\frac{y}{x}} = (xy)^{3/2} - xy^2.$$

Die Lösung existiert auf ganz D:
(Probe:)

$$\partial_x u = 3/2y(xy)^{1/2} - y^2$$
$$\partial_y u = 3/2x(xy)^{1/2} - 2xy$$

also

$$x\partial_x u - y\partial_y u = 3/2xy(xy)^{1/2} - xy^2 - 3/2xy(xy)^{1/2} + 2xy^2 = xy^2$$

d.h. u ist tatsächlich Lösung. Außerdem ist für $\xi > 0$:

$$u(\xi,\xi) = (\xi^2)^{3/2} - \xi^3 = 0.$$