

2. Übungsklausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die Funktion f ist gegeben durch $f(z) := \frac{4z + 5}{z^3 + 3z^2 - 4}$.

- Bestimmen Sie Art und Lage sämtlicher isolierter Singularitäten von f .
- Berechnen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion f um den Punkt $z_0 = -2$, die im Punkt $z_1 = 0$ konvergiert. Geben Sie den Konvergenzbereich an.
- Es sei γ der positiv orientierte Rand der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2| < 2\}$. Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\oint_{\gamma} f(z) dz.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für $R > \sqrt{2}$ sei Γ der positiv orientierte Rand des Halbkreises $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0 \text{ und } |z| < R\}$; es gilt folglich $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, wobei Γ_1 und Γ_2 gemäß der nebenstehenden Skizze definiert sind. Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(z) := \frac{ze^z}{4 + z^4}.$$

- Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz.$$

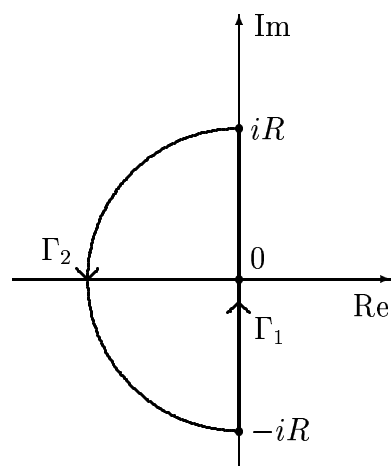
- Beweisen Sie mittels geeigneter Abschätzungen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0.$$

- Zeigen Sie nun, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{4 + x^4} dx$$

existiert, und berechnen Sie seinen Wert.



Aufgabe 3 (10 Punkte)

- a) Berechnen Sie, gegebenenfalls in Parameterdarstellung, alle Lösungen von

$$(*) \quad y = x(y')^2 + (y')^2.$$

- b) Bestimmen Sie nun zwei Lösungen von (*), die durch den Punkt $(1, 2)$ gehen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Für $y = y(x)$ ist die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$yy' \left(1 - \frac{x}{y^2} \right) - \left(1 - \frac{x^2}{y} \right) = 0.$$

- a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form.
- b) Geben Sie die Lösung durch den Punkt $(0, \sqrt[3]{3})$ in impliziter Form an.

Nach der Klausur

Die korrigierten Übungsklausuren können Sie ab Montag, den 12.2.2001, im Sekretariat abholen. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, dem 15.2.2001, von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.