UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P.E. Bradley

WS 2001/2002
8.12.2001

1. Übungsklausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung

$$S\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \frac{iz+1}{iz-1}$$

und das Gebiet $G := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| > 1\}$.

a) Skizzieren Sie G und $S(G)$.

b) Bestimmen Sie eine holomorphe Abbildung, die $S(G)$ auf die Menge

$$H := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right\}$$

abbildet.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Möbiustransformationen.

a) Bestimmen Sie alle Möbiustransformationen $S, T \in \mathfrak{M}$ mit

$$\begin{array}{lll} S(0) = 1, & S(1) = \infty, & S(\infty) = 0, \\ T(0) = 0, & T(1) = \infty, & T(\infty) = 1. \end{array}$$

b) Seien $T_1 := S \circ T$, $T_2 := T \circ S$ und $T_3 := S^2 := S \circ S$. Bestimmen Sie

$$T_k(0), \quad T_k(1), \quad T_k(\infty) \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Geben Sie T_1, T_2 und T_3 in der Form $T_k(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ an.

c) Bestimmen Sie die Menge

$$\mathbb{S}_3 := \{A \in \mathfrak{M} \mid A(\nu) \in \{0, 1, \infty\} \text{ für alle } \nu \in \{0, 1, \infty\}\}$$

und zeigen Sie: $B, B' \in \mathbb{S}_3 \Rightarrow B \circ B' \in \mathbb{S}_3$.

d) Ist $(\mathbb{S}_3, \circ)$ eine Gruppe? Ist $\circ$ auf $\mathbb{S}_3$ kommutativ? (Begründung!)

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}.$$

a) Ist f holomorph? (Begründung!)

b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von f und skizzieren Sie die Fixpunktmenge.

c) Sei $M_t := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 \text{ und } \arg z = t\}$ für $t \in [0, 2\pi)$. Bestimmen Sie $f(M_t)$ für alle $t \in [0, 2\pi)$ und skizzieren Sie M_τ sowie $f(M_\tau)$ für alle $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

d) Ist f bijektiv? (Begründung!)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Für welchen Zweig der dritten Wurzel gilt $i \in f(H)$, wenn f die Abbildung

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{z}},$$

ist? Gibt es einen Zweig der dritten Wurzel, sodass $-i \in f(H)$ ist? (Begründungen!)

Nach der Klausur

Die korrigierten Übungsklausuren können Sie ab Dienstag, den 18.12.2001, im Sekretariat abholen. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, dem 20.12.2001, von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.