UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
P.E. Bradley

WS 2001/2002
1.2.2002

2. Übungsklausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es bezeichne log den Hauptzweig des komplexen Logarithmus, und es sei

$$G = \left\{ re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; r \in (1, e),\ \varphi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \right\} .$$

Skizziern Sie G. Bestimmen und skizzieren Sie $\log(G)$.
Welches Gebiet wird unter $z \mapsto \log z$ auf

$$H = \{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w \in (0,1) \}$$

abgebildet?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Entwickeln Sie die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + (1-i)z + 2 - 2i}$$

um ihre Polstellen in $\mathbb{C}$ jeweils in eine Laurentreihe.

b) Bestimmen Sie die Residuen von f in ihren komplexen Polstellen.

c) Berechnen Sie

$$\oint_\gamma (z - 2i) f(z)\, dz \,,$$

wobei γ der positiv orientierte Rand von $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$ sei.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für $R > 1$ sei γ der positiv orientierte Rand des Gebiets

$$S := \left\{ re^{i\varphi} \;\middle|\; r \in (0,R),\ \varphi \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right) \right\} .$$

a) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{z}{1+z^3}\, dz .$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass für die n*-ten Einheitswurzeln* $z_k = \exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{n}\right)$ *mit* $k = 0, \dots, n-1$ *gilt:*

$$\left. \frac{1}{(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})} \right|_{z=z_0} = -\frac{e^{i\pi/n}}{n} .$$

b) Berechnen Sie nun unter Verwendung von a) und geeigneten Abschätzungen

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^3}\, dt .$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2x^2y^2 + x^2y + x^3yy' = 0 ,$$

indem Sie für eine zugehörige Differentialform einen integrierenden Faktor der Gestalt

$$\mu(x,y) = f(xy)$$

bestimmen. Bestimmen Sie alle Lösungen y mit $y(1) = \frac{1}{2}$.

Nach der Klausur

Die korrigierten Übungsklausuren können Sie ab Mittwoch, den 13.2.2002, im Sekretariat abholen. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, dem 14.2.2001, von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.