UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
J. Bitzer

01.02.2003
– WS 2002/2003 –

# 2. Übungsklausur zur HM III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

## 1. Aufgabe (10 Punkte):

Es ist

$$f(z) = \frac{5z + 3i}{iz + z^2}$$

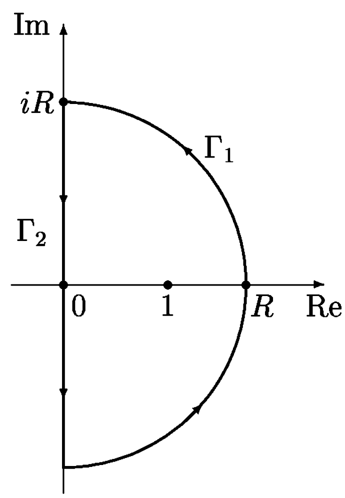
gegeben.

a) Berechnen Sie die Laurent-Reihe von $f$ um $i$, die in $-\frac{i}{2}$ konvergiert. Geben Sie den Konvergenzbereich dieser Reihe an.

b) Es sei $C$ die positiv durchlaufene Kurve $\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{i}{2}| = 1\}$.
Berechnen Sie

$$\oint_C f(z)\, dz \,.$$

## 2. Aufgabe (10 Punkte):




Gegeben ist die Funktion $f$ durch

$$f(z) = \frac{ze^{-z}}{1 - z^3} \,.$$

Für $R > 1$ wird die einen Halbkreis berandende Kurve $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ gemäß der nebenstehenden Skizze definiert.

a) Berechnen Sie $\oint_\Gamma f(z)\, dz$.

b) Beweisen Sie mittels geeigneter Abschätzungen $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = 0$.

c) Begründen Sie, daß das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 \cos x + x \sin x}{1 + x^6}\, dx$$

existiert, und berechnen Sie dessen Wert.

– bitte wenden –

**3. Aufgabe (10 Punkte):**

Lösen Sie das Anfangswertproblem für $y = y(x)$

$$y'' = (y+1)\,y' \ , \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

in expliziter Form.

**4. Aufgabe (10 Punkte):**

Für $y = y(x)$ ist die Differentialgleichung

$$(*) \qquad (1+2xy)e^{xy} - y + (x^2 e^{xy} - x)\,y' = 0$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie für $(*)$ einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(xy)$ .

b) Geben Sie die allgemeine Lösung von $(*)$ in impliziter Form an.

c) Geben Sie in impliziter Form eine Lösungskurve an, die die $x$-Achse schneidet und im Schnittpunkt die Steigung $-\frac{1}{2}$ hat.

**Viel Erfolg!**

Hinweis: Die korrigierten Übungsklausuren können ab **Dienstag, den 11. Februar**, im Sekretariat, Zimmer 312, abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **Donnerstag, dem 13. Februar, um 13.15 Uhr im Raum S 31** möglich.