UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. oec. Norbert Breindl
Dipl.-Math. Oliver Zink

WS 2003/2004
31.01.2004

2. Übungsklausur
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **(10 Punkte)** Berechne mittels Residuensatz

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+16}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx.$

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

a) Sei $u(x,y) = x^2 - cy^2 + 12x$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ existiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Bestimme diese Funktion f. Gib diese Funktion auch in der Form $f = f(z)$ an.

b) Betrachte $\dot{x} = 1 - \cos(x)$. Bestimme alle Fixpunkte und die um die Fixpunkte linearisierten Systeme mit den dazugehörigen Eigenwerten.
Bestimme $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0)$ zur Anfangsbedingung $x_0 = 0.94483$. Kurze Begründung!

Aufgabe 3 **(10 Punkte)** Betrachte

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^2. \end{aligned}$$

a) Bestimme die Fixpunkte und deren Stabilität.

b) Zeichne die Nulllinien $N_1 = \{(x,y) \mid \dot{x} = 0\}$ und $N_2 = \{(x,y) \mid \dot{y} = 0\}$ und skizziere das Phasenbild.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

a) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + x = -1$ und zeichne typische Kurven in der $(x, \dot{x})$-Ebene. Hinweis: Betrachte $y = x + 1$.

b) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + x = 1$ und zeichne typische Kurven in der $(x, \dot{x})$-Ebene.

c) Betrachte nun $\ddot{x} + x = f(\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \text{für } \dot{x} > 0 \\ 1 & \text{für } \dot{x} \le 0 \end{cases}$. Zeichne mit a) und b) typische Kurven in der $(x, \dot{x})$-Ebene.

d) Betrachte die Lösung zur Anfangsbedingung $(x, \dot{x}) = (16, 0)$. Wie oft umkreist die Lösungskurve den Ursprung bis sie im Intervall $[-1, 1] \times \{0\}$ endet. Begründung!

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die korrigierten Übungsklausuren können ab **Dienstag**, den **10. Februar 2004** im Sekretariat abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **Donnerstag**, den **12. Februar 2004** von **13.15 Uhr** bis **13.45 Uhr** im Seminarraum **S 31** möglich.