

**1. Übungsklausur**  
**Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen**  
**Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$u(x, y) = e^{cx}(x \cos y - y \sin y), \quad c \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie alle Werte  $c$ , für die  $u$  harmonisch ist.
- b) Für  $c = 1$  ist  $u$  harmonisch. Bestimmen Sie für diesen Fall alle zu  $u$  konjugiert harmonischen Funktionen  $v$ .
- c) Geben Sie nach b) alle holomorphen Funktionen  $f = u + iv$  in Abhängigkeit von  $z (= x + iy)$  an.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Gegeben ist die Abbildung

$$f(z) = \sin z$$

und die Geradenschar

$$g_c := \{z \mid \operatorname{Im} z = c, c \in \mathbb{R}\}.$$

- a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von  $c$  die Bilder  $f(g_c)$ . Welche ebenen Kurven stellen die  $f(g_c)$  dar?
- b) Für welche  $c$  ist  $f(g_c)$  ein Kreis (Begründung!)?

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Das Gebiet

$$G := \{z = re^{i\varphi} \mid 0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$$

wird durch

$$w(z) = \frac{i - z}{1 + z}$$

abgebildet.

Bestimmen Sie mit genauer Begründung  $w(G)$  und skizzieren Sie  $G$  und  $w(G)$ .

#### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad z \neq 0.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $f$  das Gebiet

$$G := \{z \mid |z| > 1\}$$

schlicht abbildet.

- b) Berechnen Sie das Bild des Viertelskreises

$$V := \{z = e^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

bei der Abbildung  $f$ .

- c) Bilden Sie mit  $f$  das Gebiet

$$G_1 := \{z \mid |z| > 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$$

mit genauer Begründung ab und skizzieren Sie  $G_1$  und  $f(G_1)$ .

**Viel Erfolg!**

#### Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, dem **14. Dezember 2004**, im Sekretariat (312) abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am 16. Dezember von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.