2. Übungsklausur
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
— L ö s u n g e n —

Aufgabe 1

$$I = \frac{1}{4} \oint\limits_{|z|=3} \frac{z \sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\, dz$$

Die Nennernullstelle $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ des Integranden liegt in $\{|z| < 3\}$. Deshalb wenden wir die Cauchysche Integralformel für die Ableitungen im Falle $n = 1$ auf die holomorphe Funktion $f(z) = z \sin z$ an:

$$f'(z)|_{z=\frac{\pi}{2}} = \sin z + z \cos z|_{z=\frac{\pi}{2}} = 1$$

Es folgt

$$I = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi i}{1!}\, f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\, \pi i$$

Aufgabe 2

a) $f(z) = 0 \Longleftrightarrow \sin z = \cos z \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\Longleftrightarrow e^{2iz} - 1 = i(e^{2iz} + 1) \Longleftrightarrow e^{2iz} = \dfrac{1+i}{1-i} = i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}.$

Damit sind die $z_k = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, die Nullstellen von F.

Wegen

$$f'(z) = \cos z + \sin z = f(z) + 2\cos z$$

gilt für $k \in \mathbb{Z}$

$$f'(z_k) = 0 + 2\cos(\frac{\pi}{4} + k\pi) \neq 0\ .$$

Damit sind die z_k einfache Nullstellen von f.

b) Wegen $g(z) = 1/(f(z))^2$ sind die z_k 2–fache Polstellen von g, wobei $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$ die dem Ursprung nächstgelegen ist. Die Laurent–Reihe von g um z_0 hat damit die Gestalt

$$g(z) = \underbrace{\frac{C_{-2}}{(z-\frac{\pi}{4})^2} + \frac{C_{-1}}{z-\frac{\pi}{4}}}_{\text{Hauptteil}} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^k$$

Um diese Laurent–Reihe zu gewinnen, bestimmen wir zunächst unter Verwendung des Hinweises die Taylor–Entwicklung von $(f(z))^2$ um z_0:

$$\begin{aligned}
(f(z))^2 &= (\sin z - \cos z)^2 = 1 - 2\sin z\cos z = 1 - \sin 2z \\
&= 1 - \cos(2z - \frac{\pi}{2}) = 1 - \cos(2(z - \frac{\pi}{4})) \\
&= 1 - (1 - \frac{1}{2!}(2(z-\frac{\pi}{4}))^2 + \frac{2}{3}(z-\frac{\pi}{4})^4 + o((z-\frac{\pi}{4})^5) \\
&= 2(z-\frac{\pi}{4})^2(1 - \frac{1}{3}(z-\frac{\pi}{4})^2 + o((z-\frac{\pi}{4})^3))
\end{aligned}$$

für $z \to \frac{\pi}{4}$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe ergibt sich für hinreichend kleine $|z-\frac{\pi}{4}|$

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{2(z-\frac{\pi}{4})^2}\,(1 + \frac{1}{3}\,(z - \frac{\pi}{4}^2 + o((z-\frac{\pi}{4})^3) \\
&= \frac{1}{2(z-\frac{\pi}{4})^2} + \frac{1}{6} + o((z-\frac{\pi}{4}))\ .
\end{aligned}$$

für $z \to \frac{\pi}{4}$.

Also ist $\frac{1}{2}\,(z-\frac{\pi}{4})^{-2}$ der Hauptteil der Laurent–Reihe, und es ist $c_{-1} = 0$ das Residuum in der zweifachen Polstelle $z_0 = \frac{\pi}{4}$ von g.

Aufgabe 3

Da der Integrand eine gerade Funktion ist, gilt

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \text{ mit } f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\ .$$

Die Faktorisierung

$$(z-ia)(z+ia)(z-ib)(z+ib)$$

des Nenners der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b)}$$

zeigt:

$f(z)$ besitzt vier einfache Polstellen, die nicht auf der reellen Achse liegen, und nur die Polstellen ia und ib liegen in der oberen Halbebene.

Weiter erfüllt f in der oberen Halbebene die Wachstumsbedingung:

Mit $z = Re^{i\varphi}$, $R > \max\{a,b\}$, $0 \le \varphi \le \pi$, gilt

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \frac{1}{|R^2e^{2i\varphi}+a^2||R^2e^{2i\varphi}+b^2|} \\
&\le \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} = \frac{1}{R^4(1-\frac{a}{R^2})(1-\frac{b^2}{R^2})}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt für hinreichend große R

$$|f(z)| \le \frac{2}{R^4}\ .$$

Damit ergibt sich

$$J = \pi i(\mathrm{Res}(f; ia) + \mathrm{Res}(f; ib))$$

Berechnung der Residuen (einfache Polstellen!):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, ia) &= (z - ia)f(z)|_{ia} = \frac{1}{(z + ia)(z^2 + b^2)}|_{ia} \\
&= \frac{1}{2ia(b^2 - a^2)} \\
\mathrm{Res}(f, ib) &= (z - ib)f(z)|_{ib} = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z + ib)}|_{ib} \\
&= \frac{1}{2ib(a^2 - b^2)}
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$J = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a(b^2 - a^2)} + \frac{1}{b(a^2 - b^2)}\right) = \frac{\pi}{2ab(a + b)}$$

Aufgabe 4

a) Mit $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = -x^2/y$ gilt

$$f_y = 1 \neq g_x = -2x/y \ .$$

Die Integralitätsbedingung ist verletzt.

b) Mit dem Ansatz $\mu = (xy)^\alpha$ ergibt sich mit

$$f^* = x^{\alpha+1}y^\alpha + x^\alpha y^{\alpha+1}, \ g^* = -x^{\alpha+2}y^{\alpha-1}$$

die Bedingung $f_y^* = g_x^*$, also

$$\begin{aligned}
&\alpha x^{\alpha+1}y^{\alpha-1} + (\alpha + 1)x^\alpha y^\alpha = -(\alpha + 2)x^{\alpha+1}y^{\alpha-1} \\
\Longrightarrow\ &2(\alpha + 1)x^{\alpha+1}y^{\alpha-1} + (\alpha + 1)x^\alpha y^\alpha = 0 \\
\Longrightarrow\ &\alpha = -1 \text{ und } \mu = 1/xy \ . \\
\Longrightarrow\ &\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) dx - \frac{x}{y^2}\, dy = 0 \text{ ist die zugehörende exakte DGL.}
\end{aligned}$$

c) Stammfunktion $F(x, y)$:

$$\begin{aligned}
F_y &= -\frac{x}{y^2} \Longrightarrow F(x, y) = \frac{x}{y} + c(x) \\
\Longrightarrow\ F_x &= \frac{1}{y} + c'(x) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \Longrightarrow c(x) = \ell n|x| \\
\Longrightarrow\ F(x, y) &= \frac{x}{y} + \ell n|x| = C,\ C \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt für die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{x}{C - \ell n|x|} \ , \ C \in \mathbb{R} \ .$$