

1. Übungsklausur
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

$G \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ sei der beschränkte Bereich, der von den Koordinatenebenen und den Flächen

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4\} \quad \text{und} \quad S_2 = \{(x, y, z) \mid z = 2 + x + y\}$$

berandet wird.

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 + 2xz \\ x^2y + 2yz \\ -2z^2 \end{pmatrix}$$

durch den Rand ∂G von G nach außen.

(**Hinweise:** Integralsatz von Gauss, Zylinderkoordinaten.)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$v(x, y) = -2xy + e^y \cos \beta x + e^{\alpha y} \cos x$$

Imaginärteil einer holomorphen Funktion f in \mathbb{C} ist.

b) Berechnen Sie für $\alpha = 1, \beta = -1$ alle holomorphen Funktionen f mit $\text{Im } f = v$ (aus a)) in der Form $f = f(z), z \in \mathbb{C}$.

c) Geben Sie die Funktion f (aus b)) an, für die $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi^2$ erfüllt ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- Berechnen Sie für $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) Real- und Imaginärteil aller Zahlen $w = i^z$.
- Berechnen Sie Betrag und Argument aller $w = i^z$ für $z \in \mathbb{C}$.
- Bestimmen Sie die Bilder der Mengen

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{\pi}\right\}$$

unter der Funktion $w = f(z) = i^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Beschreiben Sie diese Bilder möglichst genau.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es ist

$$w = f(z) = \frac{z+i}{z-i}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}},$$

gegeben.

- Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse. Geben sie insbesondere das Bild der orientierten Strecke $z(t) = (1-t)i$, $-1 \leq t \leq +1$, an.
- Bilden Sie die orientierte (von 0 nach 1) reelle Achse ab. Beschreiben Sie das Bild genau.
- Es sei G das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$. Bestimmen Sie das Bildgebiet $f(G)$.

Sollten Geraden oder Kreise vorkommen, so sind Richtung (zwei Punkte) bzw. Mittelpunkt und Radius anzugeben. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, dem **20. Dezember 2005**, im Sekretariat (312) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **21. Dezember 2005** von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.