A1 Es ist zu berechnen $I = \iint_{\partial G} \vec{f} \cdot \vec{n}\, do$, wobei $\vec{n}$ die nach außen gerichtete Normale auf ∂G ist und $\|\vec{n}\| = 1$ gilt. Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$I = \iiint_G \nabla \circ \vec{f}\, d\tau$. Hiermit wird I berechnet.

Es gilt $\nabla \circ \vec{f}(x,y,z) = x^2 + y^2$.

Es werden im $\mathbb{R}^3$ Zylinderkoordinaten (r, φ, z) um $(0,0,0)$ eingeführt. Das in der Aufgabe gegebene Gebiet G kann dann so beschrieben werden:

$$G = \{ (r,\varphi,z) \mid x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 < z < 2 + r(\cos\varphi + \sin\varphi),\ 0 < r < 2,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2} \}.$$

Mit $\nabla f \big|_{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z}} = r^2$ und $d\tau = r\, d(r,\varphi,z)$

folgt:
$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} r^2 r\, dz\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2} \left(r^4(\cos\varphi + \sin\varphi) + 2r^3\right) dr\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{4} 16 \frac{\pi}{2} + \int_{r=0}^{2} r^4\, dr \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi$$

$$= 4\pi + \frac{1}{5} 2^5 \cdot 2 = \underline{\frac{64}{5} + 4\pi}$$

A2

a) $\underline{\text{Es muss } \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \text{ erfüllt sein.}}$

Für die vorgegebene Funktion v ist

$$v_{xx} + v_{yy} = (1-\beta^2) e^y \cos \beta x + e^{\alpha y}(1-\alpha^2)\cos x .$$

Es ist $\Delta v = 0$ $\underline{\text{genau für } \alpha^2 = \beta^2 = 1 \text{ oder } \alpha = \pm 1 \text{ und } \beta = \pm 1.}$

b) $\alpha = 1, \beta = -1$: $v(x,y) = -2xy + 2e^y \cos x \quad \boxed{*}$

Es ist $u = u(x,y)$ so gesucht, dass $f = u + iv$ holomorph ist.

D.h. (Cauchy-Riemann DGLn) mit v aus $\boxed{*}$ ist u aus

$$\underbrace{u_x = v_y} \quad \text{und} \quad u_y = -v_x \quad \text{zu bestimmen.}$$

$\rightarrow u(x,y) = -x^2 + 2e^y \sin x + \varphi(y) \longrightarrow \varphi(y) = y^2 + c \quad (c \in \mathbb{R} \text{ konst})$

Also: $u(x,y) = -x^2 + 2e^y \sin x + y^2 + c$

und

$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$= -(x^2 - y^2 + 2ixy) + 2e^y \overbrace{(\sin x + i\cos x)}^{ie^{-ix}} + c$$

$$\underline{f(z) = -z^2 + 2ie^{-iz} + c \quad , c \in \mathbb{R} \text{ konst}}$$

c) $$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} + 2ie^{-i\frac{\pi}{2}} + c = -\frac{\pi^2}{4} + 2i(-i) + c$$

$$= 2 - \frac{\pi^2}{4} + c \overset{!}{=} \pi^2$$

$$\rightarrow \underline{c = \frac{5}{4}\pi^2 - 2}$$

$$\underline{f(z) = -z^2 + 2ie^{-iz} + \frac{5}{4}\pi^2 - 2}$$

A3 Wir verwenden die folgende Argumentfunktion:

$$z\in\mathbb{C},\ z\neq 0: \quad \varphi = \mathrm{Arg}(z) \iff \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}, \quad -\pi<\varphi\le\pi .$$

a) $\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$

$$\log(i) = \ln|i| + i\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = i\tfrac{\pi}{2}(1+4k), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$z\log(i) = (x+iy)(1+4k)\,i\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2}(1+4k)(-y) + i\tfrac{\pi}{2}(1+4k)\,x$$

$$\rightarrow \underline{i^z} = e^{z\log i} = \underline{e^{-y\frac{\pi}{2}(1+4k)}\,e^{ix\frac{\pi}{2}(1+4k)},\ k\in\mathbb{Z}} \quad (*)$$

$$\underline{\mathrm{Re}(i^z) = e^{-y\frac{\pi}{2}(1+4k)}\cos\left(x\tfrac{\pi}{2}(1+4k)\right),\ \mathrm{Im}(i^z) = e^{-y\frac{\pi}{2}(1+4k)}\sin\left(x\tfrac{\pi}{2}(1+4k)\right)}$$

$\underline{k\in\mathbb{Z}}$.

b) Aus $(*)$/a) liest man ab: $\underline{|i^z| = e^{-y\frac{\pi}{2}(4k+1)},\ k\in\mathbb{Z}}$

und $\underline{\mathrm{Arg}(i^z) = x\frac{\pi}{2}(1+4k)}$ (+ ganzzahliges Vielfaches von 2π, so dass ein Wert in $(-\pi,+\pi]$ rauskommt)

c) – Alle $z\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$ haben die Form $\underline{z(t) = \frac{1}{2}+it}$, $t\in\mathbb{R}$.
Gefragt ist nach $i^{z(t)}$! Oben mit $x=\frac{1}{2}$, $y=t$ ergibt $(*)$:

$$\underline{i^{z(t)} = e^{-t\frac{\pi}{2}(1+4k)}\,e^{i\frac{\pi}{4}(1+4k)}}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Für jedes $k\in\mathbb{Z}$ wird hierdurch für $t\in\mathbb{R}$ <u>eine Halbgerade von 0 ausgehend mit der Steigung $\tan(\frac{\pi}{4}+k\pi) = 1$ beschrieben.</u>
Für $t: -\infty \to \infty$ hängt die Orientierung von $i^{z(t)}$ vom Vorzeichen von $1+4k$ ab: Ist $1+4k>0$, dann ist die Orientierung nach 0 hin; Ist $1+4k<0$, dann wird die Halbgerade von 0 weg durchlaufen.

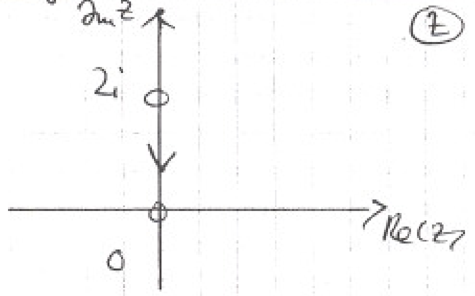
– $z\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) = -\frac{2}{\pi}$ ist die Gerade $\underline{z(t) = t - i\frac{2}{\pi}}$, $t\in\mathbb{R}$.
Setze in $(*)$ $y=-\frac{2}{\pi}$, $x=t$: $\underline{i^{z(t)} = e^{1+4k}\,e^{it\frac{\pi}{2}(1+4k)}}$, $t\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$.
Für jedes $k\in\mathbb{Z}$ wird hier ein Kreis um 0 mit dem Radius e^{1+4k} beschrieben. Bezüglich der Orientierung gilt Analoges wie vorher: für $1+4k>0$ ist sie positiv, für $1+4k<0$ negativ.

A4 $w = f(z)$ ist eine Möbiustransformation:

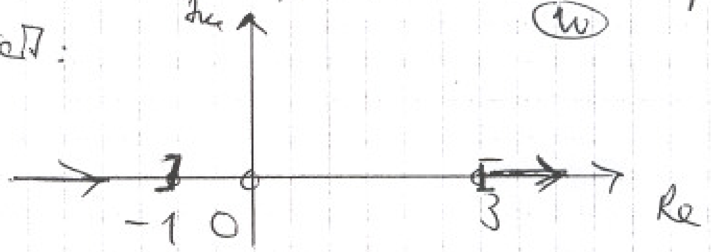
Kreise / Geraden, die nicht durch i verlaufen werden auf Kreise und Kreise / Geraden, die i enthalten, werden auf Geraden abgebildet.

f ist konform für $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

a) Die imaginäre Achse enthält i; sie geht also über in eine Gerade durch $f(\infty) = 1$. Wegen $f(0) = -1$ ist das Bild der imaginären Achse die reelle Achse. Das Bild der Strecke



(z) $z(t) = (1-t)i$, $-1 \le t \le +1$,
liegt auf der reellen Achse.
Wegen $f(2i) = 3$, $f(\frac{3}{2}i) = 5$,
$f(\frac{1}{2}i) = -3$, ist das die reelle Achse ohne das Intervall $(-1, 3)$. Die Durchlaufungsrichtung ist wie skizziert:



b) Die reelle Achse ($\not\ni i$) geht über in einen Kreis durch $f(0) = -1$ und $f(\infty) = 1$. Die Abbildung ist bei 0 konform, die imaginäre Achse geht in die reelle Achse über $\rightarrow$ der Kreis schneidet die reelle Achse in -1 orthogonal: das Bild der reellen Achse ist der Einheitskreis. Wegen $f(0) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, $f(1) = i$ ist er mathematisch negativ orientiert (im Uhrzeigersinn).

A4 weiter c) Es ist abzubilden:

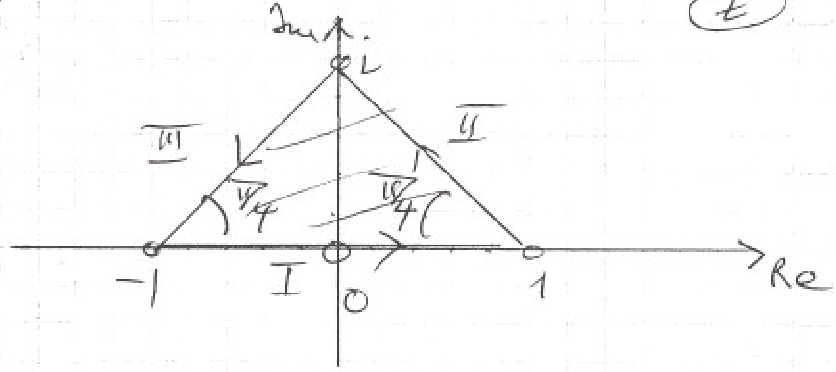


Abbildung des Randes $= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$. $\mathrm{I} \to \mathrm{I}'$, $\mathrm{II} \to \mathrm{II}'$, $\mathrm{III} \to \mathrm{III}'$

I': Nach b) mit $f(-1) = -i$ wird I abgebildet auf die Einheitskreishälfte zwischen $-i$ und i in $\{\operatorname{Im} w < 0\}$, durchlaufen von $-i$ nach i.

II' liegt auf der Geraden (II geht durch i) durch $f(\infty) = 1$ und $f(i) = i$, orientiert von 1 nach i (II' schneidet den E-Kreis in i unter dem Winkel $\pi/4$: Konformität). II' beginnt in i.

III' liegt auf der Geraden durch $f(-1) = -i$ und $f(\infty) = 1$. III' läuft nach $-i$.

Da $f(\frac{i}{2}) = -3$ sieht das Bildgebiet (schraffiert) in der w-Ebene so aus: (Inneres → Inneres)