UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis

Prof. Dr. Roland Lemmert
Dipl.-Math. Marc Mitschele

WS 2006/2007
09.12.2006

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1.Übungsklausur

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = z^2 + |z|^2$. Wo ist f komplex differenzierbar? Ist f holomorph?

b) Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$g(x+iy) = \frac{\cos(2xy)}{e^{x^2-y^2}} - i\frac{\sin(2xy)}{e^{x^2-y^2}} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Untersuchen Sie g auf komplexe Differenzierbarkeit bzw. Holomorphie.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$e^{\frac{1}{z+i}} = ie^{\frac{1}{z-i}}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$v(x,y) = e^x \sin(\lambda y) + 2xy + 6x \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die v Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist.

Ab jetzt sei $\lambda = 1$, also $v(x,y) = e^x \sin(y) + 2xy + 6x$.

b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die

$$\operatorname{Im} f(x+iy) = v(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

c) Geben Sie die Funktion f aus Teil b) in der Form $f(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$ an.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei $G = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ z + \overline{z} > \sqrt{2} \right\}$. Weiter sei die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = iz^2$.

a) Skizzieren Sie G.

b) Parametrisieren Sie den Rand von G.

c) Skizzieren Sie $f(G)$.

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $f(G)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es sei $G = \{z \in \mathbb{C} : |z + 3i| < 2\}$ und $H = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| > 3\}$.

a) Skizzieren Sie die Mengen G und H.

b) Bestimmen Sie die Möbiustransformation T mit $T(2 - 3i) = 8$, $T(-i) = 5 - 3i$ und $T(-2 - 3i) = 2$.
Bildet T die Menge G auf die Menge H ab?

c) Bestimmen Sie die zu T inverse Möbiustransformation T^{-1}.

d) Skizzieren Sie das Bild der Menge $I = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ unter der Abbildung T.
Hinweis: Betrachten Sie die Bilder der Punkte $-1, 0, i, \infty$.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, dem 19. Dezember 2006, im Sekretariat (Zimmer 312, Kollegiengebäude Mathematik) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur werden ausschließlich am 20. Dezember 2006 von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 beantwortet.