UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Lemmert
Dipl.-Math. Marc Mitschele

WS 2006/2007
03.02.2007

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

2.Übungsklausur

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $$\int_{|z|=1} \frac{\sinh z - z}{z^3}\, dz,$$

b) $$\int_{|z|=3} (z-1)^{41}\, e^{\frac{1}{1-z}}\, dz,$$

c) $$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{\cos(z^2)-1}\, dz.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für $R > 2$ sei $\Gamma_1 = [-R, R]$, $\Gamma_2 = \{Re^{it} : t \in [0,\pi]\}$ und $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Weiter sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^4 + 2z^2 + 1}.$$

a) Skizzieren Sie Γ.

b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$|f(z)| \leq \frac{96}{R^2} \quad (z \in \Gamma_2).$$

c) Zeigen Sie: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\, dz = 0$.

d) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx.$$

Hinweis zu b): Dreiecksungleichung.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = (1+y)\cosh(x), \quad y(0) = 5,$$

sowie die Iterationsfolge nach Picard

$$y_0(x) = 5, \quad y_{n+1}(x) = 5 + \int_0^x (1 + y_n(t))\cosh(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}).$$

a) Bestimmen Sie $y_1(x)$ sowie $y_2(x)$ explizit.

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$y_n(x) = 6\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\sinh x)^k\right) - 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}).$$

c) Begründen Sie, dass die Folge (y_n) auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig konvergiert. Geben Sie eine explizite Darstellung der Funktion

$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

an. Bestätigen Sie, dass diese die Lösung des Anfangswertproblems ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(*) \quad 2xy(2y^3 + 3x^2)\,dx + 3x^2(2y^3 + x^2)\,dy = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(*)$ nicht exakt ist.

b) Bestimmen Sie für $(*)$ einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x, y) = x^\alpha y^\alpha$.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(*)$ in impliziter Form an.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 13. Februar 2007, im Sekretariat (Zimmer 312, Kollegiengebäude Mathematik) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur werden ausschließlich am 14. Februar 2007 von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 beantwortet.