

1. Übungsklausur zur HM III für Studierende der Elektrotechnik und der Physik

1. Aufgabe (10 Punkte):

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die von den drei reellen Parametern a, b, c abhängige Funktion

$$v(x, y) = e^{ay} \sin x + bx^2 + cy^2$$

gegeben.

- Für welche a, b, c ist die Funktion v Imaginärteil einer holomorphen Funktion?
- Bestimmen Sie für $a = c = -1$ und $b = 1$ alle holomorphen Funktionen mit Imaginärteil v in der Form $f = f(z)$.
- Gibt es unter den in b) berechneten Funktionen eine, die $f(0) = i$ erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie gegebenenfalls dieses f an.

2. Aufgabe (10 Punkte):

Für $z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$f(z) = \sin(\pi|z|^2) + z^2$$

gegeben.

- Untersuchen Sie, wo f komplex differenzierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung von f .
- Fertigen Sie eine Skizze in der komplexen Zahlenebene an, in die Sie diejenigen z (mit $|z| < \sqrt{2}$) einzeichnen, in denen f komplex differenzierbar ist.
- Wo ist f holomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Berechnen Sie eine Lösung der Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta p(x, y) = x^2 + x - y^2 \quad .$$

3. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben sind die Abbildung

$$w = T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

und das Gebiet

$$G = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} < 0\}.$$

- a) Skizzieren Sie zunächst G . Berechnen und skizzieren Sie dann das Bild von G unter T . Sollten Kreislinien im Bild vorhanden sein, geben Sie jeweils den Radius und den Mittelpunkt an.
- b) Berechnen Sie das Bild des Gebiets

$$H = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\}$$

unter der Abbildung

$$f(z) = \tanh z.$$

Hinweis: Nutzen Sie Ihre Überlegungen aus Aufgabenteil a).

4. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben sind die Gebiete

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z - i\sqrt{2}| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

und

$$R_\varrho = \{w \in \mathbb{C} : \varrho < |w| < 1\} \text{ mit } \varrho \in (0, 1).$$

- a) Skizzieren Sie G und $R_{\frac{1}{2}}$.
- b) Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation T , so daß G auf R_ϱ abgebildet wird. Berechnen Sie die Zahl ϱ . (Achtung: $\varrho \neq \frac{1}{2}$!)
- c) Geben Sie noch eine zweite Möbius-Transformation $\tilde{T}$ ($\tilde{T} \neq T$) an, die ebenfalls G auf R_ϱ abbildet.

Viel Erfolg!

HINWEIS: Die korrigierten 1. Übungsklausuren können ab **Dienstag, dem 14.12.99**, im Sekretariat, Zimmer 312, abgeholt werden. Fragen zur Korrektur der 1. Übungsklausur können am **Donnerstag, dem 16.12.99, um 13.15 Uhr im Raum S 31** an die zuständigen Tutoren gestellt werden.