UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. M. Schneider
J. Bitzer

05.02.2000
– WS 1999/2000 –

2. Übungsklausur zur HM III
für Studierende der Elektrotechnik und der Physik

1. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1 - z^2}{z^2 + z^4} \quad .$$

a) Berechnen Sie alle Laurent-Entwicklungen von f um $z_0 = 0$, und geben Sie das jeweilige Konvergenzgebiet an.

b) Geben Sie den Hauptteil derjenigen Laurent-Entwicklung von f um

i) $z_1 = i$

ii) $z_2 = \frac{i}{2}$

an, die in einer Umgebung des jeweiligen Punkts konvergiert. (Begründen Sie sorgfältig!)

c) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz \quad .$$

2. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(x^2y + 3y^2)dx + (x^3 - x^4y)dy = 0 \quad . \tag{$*$}$$

a) Bestimmen Sie für $(*)$ einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x^2 \cdot y)$.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung von $(*)$ in impliziter Form an.

c) Geben Sie eine Lösung von $(*)$ durch $(1, -1)$ implizit an. Hat die so in einer Umgebung von $(1, -1)$ implizit definierte Funktion $y(x)$ in diesem Punkt ein lokales Extremum? (Begründen Sie sorgfältig!)

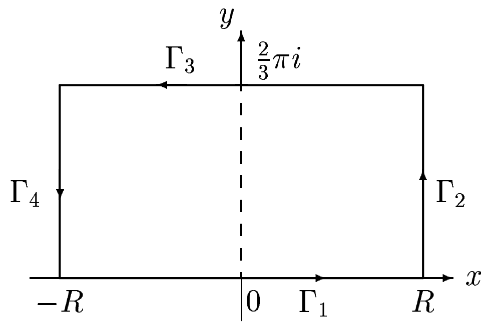
– bitte wenden –

3. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben sind die Funktion

$$f(z) = \frac{e^z}{e^{3z}+8}$$

und der nebenan skizzierte Integrationsweg $\Gamma_R = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, wobei $R > \ln 2$ ist.



a) Berechnen Sie $\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz$.

b) Weisen Sie nach, daß gilt:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_4} f(z)\,dz = 0 \,.$$

c) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{3x}+8}\,dx \,,$$

und geben Sie das Ergebnis in einer möglichst einfachen Form an, d.h. ohne Exponentialfunktionen und ohne Summen bzw. Differenzen.
Hinweis: Die Existenz des uneigentlichen Integrals braucht nicht gezeigt zu werden.

4. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die Integralgleichung

$$y(x) = a + \int_b^x \left(ty^2(t) - y(t)\right) dt \quad . \qquad (*)$$

a) Geben Sie ein zu $(*)$ äquivalentes Anfangswertproblem an, und lösen Sie dieses für $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$.

b) Rechnen Sie nach, daß die in a) gefundene Funktion $y(x)$ tatsächlich die Integralgleichung $(*)$ im Fall $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$ löst.

c) Gibt es Lösungen von $(*)$ bzw. des entsprechenden Anfangswertproblems im Fall $a = b = 0$? Geben Sie gegebenenfalls alle Lösungen an.

Viel Erfolg!

HINWEIS: Die korrigierten 2. Übungsklausuren können ab **Dienstag, dem 15.02.2000**, im Sekretariat, Zimmer 312, abgeholt werden. Fragen zur Korrektur der 2. Übungsklausur können am **Donnerstag, dem 17.02.2000, um 13.15 Uhr im Raum S 31** an die zuständigen Tutoren gestellt werden.