Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Vorlesungszusammenfassung

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Karlsruher Institut für Technologie – Institut für Analysis *

WS 2013/14
Stand: 2. März 2014

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze. Der Besuch der Vorlesung ist hierdurch nicht zu ersetzen: in der Vorlesung wird erklärt, begründet, veranschaulicht und eingeordnet.

*LaTeX: Christina Hägele, Korrekturen: Tobias Ried

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Beispiele. Grundlegende Begriffe.

Beispiele. (i) radioaktiver Zerfall

(ii) Schwingungsgleichung

(iii) mathematisches Schwerependel

(iv) Wachstumsmodell

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichung (GDGL). Begriffe.

Sei $H : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $(x, y, p_1, \ldots, p_n) \mapsto H(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ eine Funktion.

$$H(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

heißt *GDGL n-ter Ordnung.*
Eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : J$ (Intervall) $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x)$ mit

$$H(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0,\ x \in J \tag{1.2}$$

heißt *Lösung der DGL (1.1) auf J.*
Hat man $H(x, y, p_1, \ldots, p_n) = p_n - F(x, y, p_1, \ldots, p_{n-1})$, so heißt die zugehörige DGL

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

explizit.

1.2 Bemerkung zum geometrischen Aspekt einer GDGL im Fall $n = 1$.

Das einer GDGL $H(x, y, y') = 0$ zugeordnete Richtungsfeld. Und was das für das Lösen der DGL bedeutet.

2 Einfache integrierbare Typen von GDGLn.

2.1 Die DGL mit getrennten Variablen

$f : I_1 \to \mathbb{R}$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$ (I_1, I_2 reelle Intervalle) sind gegebene stetige Funktionen. Es liegt die DGL

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I \text{ (Intervall)} \subset I_1 \tag{2.1}$$

vor.

Satz 2.1. *(a) Sind $y_1, y_2, \ldots$ die Nullstellen von g, so sind die konstanten Funktionen*

$$y = \varphi(x) = y_j,\ x \in I,\ j = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Lösungen von (2.1).

(b) Ist $g(t) \neq 0$ für $t \in J \subset I_2$ (J etwa (y_1, y_2)), so wird jede Lösung $y = \varphi(x)$, $x \in I$ mit $\varphi(I) \subset J$, der DGL (2.1) implizit durch

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I, \tag{2.3}$$

gegeben. Hierbei ist $c \in I$ eine beliebige Konstante.

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I, \tag{2.4}$$

ist eine Darstellung der Lösung durch (x_0, y_0).

2.2 Beispiele

2.2.1 Die lineare homogene DGL 1. Ordnung

$$y' = f(x)y, \quad x \in I. \tag{2.5}$$

Satz 2.2 (Die allgemeine Lösung von (2.5))**.** *Es sei $f \in \mathcal{C}(I)$ (stetig auf I). Jede Lösung der DGL (2.5) ist durch*

$$y = \varphi(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right), \quad x \in I, \tag{2.6}$$

mit beliebigem $x_0 \in I$ und einer beliebigen Konstanten c gegeben. Die Lösung durch den Punkt $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ ist

$$y = \varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right), \quad x \in I. \tag{2.7}$$

2.2.2 Die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0. \tag{2.8}$$

Mittels der Substitution "$y \to u := \frac{y}{x}$" wird die DGL (2.8) umgeschrieben in eine DGL für u. Diese ist vom Typ "getrennte Variablen" und kann gemäß Satz 2.1 gelöst werden. Dann wird die Substitution rückgängig gemacht: "$u \to y = xu$".

Beispiel. $x^2y' = x^2 + xy + y^2$, $x \neq 0$.

2.3 Die DGL vom Bernoulli Typ

$$y' + h(x)y = q(x)y^\alpha, \quad x \in I. \tag{2.9}$$

Hier sind $h,\ q \in \mathcal{C}(I)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.
Es wird $\alpha \neq 1$ vorausgesetzt. (Warum ist das keine Einschränkung?)
Durch Multiplikation von (2.9) mit $\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x h(t)\,\mathrm{d}t\right)$, $x \in I$, wird (2.9) geschrieben als DGL vom Typ "getrennte Variablen" für μy (wobei y (2.9) löst). Man erhält als Lösung (mit beliebigem $x_0 \in I$)

$$y = \varphi(x) = (\mu(x))^{-1}\left(\varphi(x_0)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_{x_0}^x q(t)\mu(t)^{1-\alpha}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x \in I. \tag{2.10}$$

2.4 Die lineare inhomogene DGL 1.Ordnung

$$y' + h(x)y = q(x), \quad x \in I, \tag{2.11}$$

erhält man aus 2.3, wenn man dort $\alpha = 0$ setzt.
Mit $y_0(x) := \exp\left(-\int_{x_0}^x h(t)\,\mathrm{d}t\right)$ ist gemäß Satz 2.5 durch cy_0 mit beliebigen Konstanten c die allgemeine Lösung von $y' + h(x)y = 0$ (der (2.11) zugeordneten homogenen Gleichung) gegeben.

Satz 2.3 (Die allgemeine Lösung von (2.11))**.**

(a) y_p mit $y_p(x) = \left(\int_{x_0}^x \frac{q(t)}{y_0(t)}\,\mathrm{d}t\right) y_0(x)$, $x \in I$, ist eine Lösung von (2.11).

(b) Ist $y = \varphi(x)$ eine Lösung von (2.11), so gilt

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)y_0(x) + y_p(x),\ x \in I.$$

(c) Für jede Konstante c ist $\varphi(x) = cy_0(x) + y_p(x)$ *Lösung von (2.11).*

Beispiel.

$$\frac{y'}{y} = x\ln(y) + 2x, \quad y > 0.$$

3 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf. Die Lipschitz-Bedingung.

3.1 Das Problem. Die Voraussetzungen.

Es liegt vor das **Anfangswertproblem (AWP)**

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{3.1}$$

mit den folgenden Voraussetzungen und Bezeichnungen:

(i) Mit $I_1 = \{x| \, |x - x_0| \leq \alpha\}$, $I_2 = \{y| \, |y - y_0| \leq \beta\}$ und $R = I_1 \times I_2$ sei $f : R \to \mathbb{R}$ stetig.

(ii) $M := \max\{|f(x, y)| \, |(x, y) \in R\}$.

Gesucht ist eine Lösung durch (x_0, y_0), also eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \subset I_1 \to I_2$, $(x_0 \in I)$ mit $(x, \varphi(x)) \in R$ für $x \in I$ und

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad x \in I \text{ und } \varphi(x_0) = y_0. \tag{3.2}$$

3.2 Behandlung des Problems

1. Schritt

Satz 3.1. *a) Ist $\varphi : I \to I_2$ Lösung von (3.1), so gilt*

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) \, \mathrm{d}t, \quad x \in I. \tag{3.3}$$

b) Ist $\varphi \in \mathcal{C}(I)$ Lösung von (3.3), so ist φ Lösung von (3.1).

Definition 3.1 (Lipschitz-Bedingung)**.** $f : R \to \mathbb{R}$ genügt auf R einer Lipschitz-Bedingung, falls es eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in R$

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \tag{3.4}$$

gilt.

2. Schritt

Satz 3.2 (Eindeutigkeitssatz)**.** *$f \in \mathcal{C}(R)$ und f genüge auf R einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L. $\varphi, \psi : I_1 \to I_2$ seien Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$. Es existiere ein x_1 im Innern von I_1, für das $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ gilt. Dann hat man $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I_1$.*

3. Schritt

Satz 3.3 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)**.** *f, M, α, β seien wie unter 3.1, (i). f genüge in R einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L. Dann gibt es auf $I_\delta(x_0) = \{x|\ |x - x_0| \le \delta\}$, $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$, genau eine Lösung φ des AWP*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.5}$$

Zum Beweis. Die zu (3.5) äquivalente Integralgleichung (3.3) (Satz 3.1) wird *iterativ* (Picard-Iteration) gelöst.
Definiere $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ... : I_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ rekursiv:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &:= y_0, \\ \varphi_{n+1}(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t))\,\mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.6}$$

Es gelten:

(i) Die Funktionen (3.6) sind wohldefiniert.

(ii) Die Folge (φ_n) ist auf $I_\delta(x_0)$ konvergent, es gibt also ein $\varphi : I_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ $(n \to \infty)$ für $x \in I_\delta(x_0)$.

(iii) $\varphi \in \mathcal{C}(I_\delta(x_0))$ und $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t$, $|x - x_0| \le \delta$.

■

3.3 Anmerkungen. Beispiele.

(i) $y' = 3y^{2/3}$, $y(x_0) = 0$.
Das Problem hat viele Lösungen.

(ii) $y' = 2 \cdot 10^6 xy^2$, $y(0) = 1$.
Die rechte Seite der DGL ist $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Trotzdem existiert die Lösung nur für $|x| < 10^{-3}$.

(iii) $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = \alpha > 0$.
Die Lösung existiert höchstens für $x < \frac{1}{\alpha}$.

4 Implizite DGLn.

4.1 $F(x, y, y') = 0$

Voraussetzung.

(1) Es ist $F = F(x, y, p) \in \mathcal{C}^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^3$, mit $D_3F(x, y, p) \neq 0$ für $(x, y, p) \in G$ gegeben.

(2) Gesucht ist $y = \varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J)$ derart, dass für $x \in J$

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G$$

gilt und für alle $x \in J$

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$$

erfüllt ist.

Beispiele. f, g, h, H, G seien gegebene Funktionen.

(i) $x = H(y, y')$, $y = G(x, y')$, $x = h(y')$, $y = g(y')$

(ii) $y = xf(y') + g(y')$ (Lagrange oder d'Alembert Gleichung)

(iii) $y = xy' + g(y')$ (Clairaut DGL)

Satz 4.1. *Gibt es Konstanten a, b derart, dass*

$$F(x, ax + b, a) = 0 \quad \text{für alle } x \in J \tag{4.1}$$

erfüllt ist, so sind $y = \varphi(x) = ax + b$, $x \in J$, Lösungen der DGL $F(x, y, y') = 0$.

Beispiel. (i) $y = xy' + g(y')$

(ii) $y = y' + (y')^2$

(iii) $y = xf(y') + g(y')$

Satz 4.2. *Seien $\psi, \chi \in \mathcal{C}^1(I)$.*

$$x = \psi(t), y = \chi(t) \quad (t \in I) \tag{4.2}$$

ist die Parameterdarstellung einer von einer Geraden verschiedenen Lösung der DGL $F(x, y, y') = 0$, falls

$$F(\psi(t), \chi(t), t) = 0, \quad t \in I, \tag{4.3}$$

$$\dot{\chi}(t) = t \cdot \dot{\psi}(t), \quad t \in I, \tag{4.4}$$

erfüllt sind.

Beispiele. (i) $y = x(y')^2 + y'$

(ii) $y = y' + (y')^2$, $y(1) = 2$

4.2 $\varphi(y, y', y'') = 0$

Beispiele. (i) $y''(x) + c\sin(y(x)) = 0$ (c konstant)

(ii) $\ddot{r}(t) = -\frac{\gamma M}{r^2(t)}$, $r(0) = R$, $\dot{r}(0) = v_0$

(iii) $y''(x) + p\,(y'(x))^2 + q\sin(y(x)) = 0$ ($p > 0$, $q > 0$ konstant)

Satz 4.3. *Es sei $p = p(t)$ Lösung der Gleichung*

$$\phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0. \tag{4.5}$$

Genügt dann $y = \varphi(x)$ der DGL $y' = p(y)$, so ist $y = \varphi(x)$ Lösung der DGL $\phi(y, y', y'') = 0$.

Beispiel. $y'' = yy' + (y')^2$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

5 Exakte DGLn

5.1 Erinnerungen an HM II

Kettenregel, Potentialfeld

Satz 5.1 (Satz 4, Abschnitt 38.3). *Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Es gilt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(D)$, ist genau dann auf D ein Potentialfeld, wenn auf D*

$$D_2 v_1 = D_1 v_2 \tag{5.1}$$

erfüllt ist.

5.2 Die DGL $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$. Exaktheit.

Bedeutung der Schreibweise

$$f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5.2}$$

für eine DGL und wie hier die DGL $y' = F(x,y)$ enthalten ist.

5.2.1 Voraussetzungen für dieses Kapitel

$D \subset \mathbb{R}^2$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f, g \in \mathcal{C}^1(D)$ und $f^2(x,y) + g^2(x,y) \neq 0$ für $(x,y) \in D$.

Definition 5.1. Die DGL (5.2) heißt *exakt in D*, falls in D

$$D_2 f = D_1 g \tag{5.3}$$

gilt.

5.3 Lösen exakter DGLn

Satz 5.2. *Es sei die DGL (5.2) mit den unter 5.2.1 formulierten Voraussetzungen in D exakt, und H sei ein Potential in D für das Vektorfeld $\vec{v} := \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Dann sind alle Lösungen von (5.2) implizit durch $H(x,y) = c$ (c beliebig, konstant) gegeben. (Die Lösungen sind die Höhenlinien des Potentials.)*

Beispiele. (i) $y' = p(x)q(y)$ (siehe Abschnitt 2.1 – DGL mit getrennten Variablen)

(ii) $\frac{y}{x^2+y^2} - \left(1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) y' = 0$

5.4 Der integrierende Faktor

Es liegt die DGL (Abschnitt 5.2)

$$f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{5.4}$$

mit den dort formulierten Voraussetzungen (5.2.1) vor. *Die DGL (5.2) sei nicht exakt.*

Definition 5.2. Eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $\mu = \mu(x,y)$ ($\mu \neq 0$ in D) heißt *integrierender Faktor* für (5.2), falls die zu (5.2) äquivalente DGL

$$(\mu f)(x,y)\,\mathrm{d}x + (\mu g)(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5.5}$$

in D exakt ist, falls also μ der folgenden partiellen DGL genügt:

$$D_2(\mu f) = D_1(\mu g) \quad \text{in } D. \tag{5.6}$$

Mit geeigneten Ansätzen kann man die Lösung von (5.6) auf die Lösung gewisser GDGLn zurückführen. Etwa wenn man fordert, dass μ eine spezielle Form hat, wie z.B. $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right)$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$, ...

Beispiele. (i) Die lineare inhomogene Gleichung 1. Ordnung (Abschnitt 2.4).

(ii) $y - (x^2 + y^2 + x)y' = 0$ (Beispiel 2 in Abschnitt 5.3)

6 Lineare DGLn n-ter Ordnung

6.1 Definitionen. Problemformulierung.

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $p_1, \ldots, p_n, r \in \mathcal{C}(J)$ sind gegebene Funktionen. Mit D wird der Operator der Differentiation bezeichnet: $Dy := y'$, $y \in \mathcal{C}^1(J)$. $D^j y = D(D^{j-1}y)$, $D^0 y = y$ $(j \in \mathbb{N})$.

Definition 6.1. $L : \mathcal{C}^n(J) \to \mathcal{C}(J)$ mit

$$L := D^n + \sum_{j=1}^{n} p_j D^{n-j} \tag{6.1}$$

heißt *linearer Differentialoperator der Ordnung n.*

Erinnerung **Linearität** bedeutet (vgl. 19.1)

$$\begin{array}{ll} L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2), & y_1, y_2 \in \mathcal{C}^n(J) \\ L(cy) = cL(y), & c \in \mathbb{R} \text{ konstant}, \ y \in \mathcal{C}^n(J) \end{array}$$

Gesucht sind alle Lösungen *(die allgemeine Lösung)* y der Gleichung

$$Ly = r \text{ auf } J \quad \text{(Lineare DGL der Ordnung } n) \tag{6.2}$$

Ist $r \neq 0$, so heißt die Gleichung (6.2) *inhomogen*. Die Gleichung $Ly = 0$ ist die zu (6.2) gehörende *homogene Gleichung*. Die allgemeine Lösung von (6.2) werden wir auch durch $\mathcal{L}_r$ bezeichnen:

$$\mathcal{L}_r := \{\, y \in \mathcal{C}^n(J) \mid (Ly)(x) = r(x), \ \ x \in J \,\}.$$

Hiermit bezeichnet $\mathcal{L}_0$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Mit HM II schreiben wir für $\mathcal{L}_0$ auch Kern(L). Wir erinnern daran, dass $\mathcal{L}_0$ ein Vektorraum ist: ein Teilraum des Vektorraumes $C^n(J)$. Wir erinnern an den **Dimensionssatz** aus HM II (19.2, Satz 3):

Satz 6.1 (Dimensionssatz)**.** *Sind* V, W *Vektorräume, ist* $\dim(V)$ *endlich und ist* $f : V \to W$ *eine lineare Abbildung, so gilt*

$$\dim(V) = \dim(\mathit{Kern}(f)) + \dim(\mathit{Bild}(f)).$$

6.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz 6.2. *Es seien* $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{C}(J)$ *und* L *der lineare Differentialoperator*

$$L = D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \ldots + p_n.$$

Es gilt:
Zu $x_0 \in J$ *und Zahlen* $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{R}$ *gibt es genau eine Funktion* $f \in \mathcal{C}^n(J)$*, die auf* J *der homogenen DGL* $L(y) = 0$ *und den Anfangsbedingungen* $f^{(j)}(x_0) = k_j$*,* $j = 0, 1, \ldots, n-1$ *genügt.*

Folgerung: Das Problem $L(f) = 0$ auf J, $f^{(j)}(x_0) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, hat nur die triviale Lösung $f = 0$.

6.3 Die homogene Gleichung

Satz 6.3. *Für* $L : \mathcal{C}^n(J) \to \mathcal{C}(J)$*,* $L = D^n + \sum_{j=1}^n p_j D^{n-j}$ *gilt*

$$\dim \mathit{Kern}(L) \, (= \dim(\mathcal{L}_0)) = n.$$

Satz 6.4. *Es sei* L *ein linearer Differentialoperator der Ordnung* n*. Sind* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL* $L(y) = 0$ *auf* J*, so kann jede Lösung* $y = f(x)$*,* $x \in J$*, in der Form*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \tag{6.3}$$

mit geeigneten Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *geschrieben werden.*

Bemerkung $\{\sum_{k=1}^n c_k u_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $L(y) = 0$.
Sind die p_j in L konstant, so nennen wir L einen *KK-Operator*. Für KK-Operatoren kann man Kern(L) bestimmen.

6.4 Rechnen mit KK-Operatoren

Es liegt vor $A = \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}$ mit **konstanten** reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $a_0 \neq 0$. A heißt *KK-Operator*. Wir betrachten im Folgenden die KK-Operatoren auf $\mathcal{C}^\infty(J)$

$$A : \mathcal{C}^\infty(J) \to \mathcal{C}^\infty(J), \; A \text{ linear}.$$

6.4.1

Es seien $A = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j}$ $(a_0 \neq 0)$, $B = \sum_{j=0}^{m} b_j D^{m-j}$ $(b_0 \neq 0)$ zwei KK-Operatoren und λ eine Konstante. Es können $A + B$, λA, AB gebildet werden. Wegen $D^r D^s = D^s D^r$ $(r, s \in \mathbb{N})$ gilt $AB = BA$.

6.4.2

Dem KK-Operator A wird sein **charakteristisches Polynom** p_A zugeordnet:

$$A = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j} \to p_A(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j},\ x \in \mathbb{R}.$$

Diese Zuordnung ist bijektiv und mit den oben (6.4.1) beschriebenen Operationen verträglich:

Satz 6.5. *Es seien A, B KK-Operatoren mit den charakteristischen Polynomen p_A, p_B. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelten:*

(a) $A = B \Leftrightarrow p_A = p_B$,

(b) $p_{A+B} = p_A + p_B$,

(c) $p_{AB} = p_A p_B$,

(d) $p_{\lambda A} = \lambda p_A$.

Zur Bedeutung des charakteristischen Polynoms der folgende Satz:

Satz 6.6. *Mit $A = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j}$, a_j konstant, gelten:*

(a) $A(e^{kx}) = e^{kx} p_A(k)$ *(k konstant)*

(b) $A(x^l e^{kx}) = e^{kx} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} x^{l-j} p_A^{(j)}(k)$, $l \in \mathbb{N}$, *k konstant.*
Hieraus ergibt sich:

(c) Für $m \in \mathbb{N}$, r konstant und $A = (D - r\mathrm{id})^m$ gilt:
$A(x^l e^{rx}) = 0$ *für* $l = 0, 1, \ldots, m - 1$.

6.5 Bestimmung einer Lösungsbasis für $Ly = 0$ mit einem KK-Operator L.

Für das Folgende beachte man: Aus Satz 6.5, (a), (c) folgt:
Für $p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ hat man

$$p = p_A \quad \text{mit} \quad A = a_0(D - x_1\mathrm{id})(D - x_2\mathrm{id})\cdots(D - x_n\mathrm{id}).$$

Satz 6.7. *Es sei L ein KK-Operator, der als Produkt von KK-Operatoren $A_1, \ldots, A_k$,*

$$L = A_1 A_2 A_3 \cdots A_k$$

geschrieben werden kann. Dann gilt: Kern$(A_j) \subset$ Kern(L), $j = 1, 2, \ldots, k$. (Der Lösungsraum von $L(y) = 0$ enthält den Lösungsraum von $A_j(y) = 0$ für jedes j.)

Lösung von $L(y) = 0$. $\quad L = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{n-j}$, a_j konstant, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

1. p_L **hat** n **verschiedene reelle Nullstellen**

   Satz 6.8. *$p_L(r_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. $r_j \neq r_l$ $(j \neq l)$. Dann wird die allgemeine Lösung der Gleichung $L(y) = 0$ auf $\mathbb{R}$ durch*

   $$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{r_k x}$$

   mit beliebigen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gegeben.

2. p_L **hat mehrfache reelle Nullstellen**

   Satz 6.9. *Die m Funktionen $u_j(x) = x^j e^{rx}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ sind l.u. Lösungen der Gleichung $(D - r\,id)^m(y) = 0$ (Beachte Satz 6.6 (c)).*

   Wir fassen zusammen:

   Satz 6.10. *$Ly = 0$ sei eine lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten. p_L habe die verschiedenen reellen Nullstellen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $m_1, m_2, \ldots, m_k$ $\quad(m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n)$. Dann ist $u_{q,p}:\ u_{q,p}(x) = x^{q-1}e^{r_p x}$, $q = 1, \ldots, m_p$, $p = 1, 2, \ldots, k$ eine Basis des Lösungsraumes von $L(y) = 0$.*

3. p_L **hat komplexe Nullstellen**

   Man kann alles wie vorher mit der komplexen Exponentialfunktion durchführen. Die Lösungen sind dann komplexwertig. Werden reelle Lösungen verlangt, so verwendet man:

Satz 6.11. *Ist* $\alpha + \mathrm{i}\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ *eine Nullstelle der Ordnung* m *von* p_L, *so ist* $\alpha - \mathrm{i}\beta$ *ebenfalls eine Nullstelle der Ordnung* m, *und der zugehörige reelle Operator in der Faktorisierung von* L *ist*

$$A = (D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\mathrm{id})^m.$$

Der Lösungsraum von $A(y) = 0$ *hat die reelle Basis*

$$\left\{u_q, v_q : \, u_q(x) = x^{q-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \; v_q(x) = x^{q-1} e^{\alpha x} \sin \beta x, \; q = 1, 2, \ldots, m\right\}$$

6.6 Wie die homogene und die inhomogene Gleichung zusammenhängen.

Satz 6.12. *Es sei* $L : \mathcal{C}^n(J) \to \mathcal{C}(J)$ *ein linearer Differentialoperator* n*-ter Ordnung (wie in 6.1) mit variablen stetigen Koeffizienten* $p_j \in \mathcal{C}(J)$, $r \in \mathcal{C}(J)$. *Es sei* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *eine Basis des Lösungsraumes von* $L(y) = 0$, *und* y_p *eine Lösung von* $L(y) = r$. *Dann hat jede Lösung* $y = f(x)$ *der Gleichung* $L(y) = r$ *die Form*

$$f(x) = y_p(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x), \quad x \in J,$$

wobei $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *Konstanten sind.*

Bemerkungen

(1) Vergleiche mit Satz 6.4.

(2) $\{y_p + \sum_{j=1}^n c_j u_j \mid c_j \text{ konstant}\}$ ist die allgemeine Lösung von $Ly = r$. Mit den Bezeichnungen aus 6.1 können wir Satz 6.12 auch übersichtlich so schreiben:

$$\mathcal{L}_r = y_p + \mathcal{L}_0.$$

Zur Lösung von $Ly = r$ sind also gemäß Satz 6.12 die zwei folgenden Probleme zu behandeln:
P1. Berechne die allgemeine Lösung von $L(y) = 0$: Berechne $\mathcal{L}_0$.
P2. Berechne eine Lösung y_p von $L(y) = r$.

6.7 Berechnung von y_p. Variation der Konstanten.

P2 ist lösbar, wenn **P1** gelöst ist. Gegeben sind n l.u. Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von $L(y) = 0$. Es wird y_p mit $L(y) = r$ wie folgt bestimmt:

Variation der Konstanten Ansatz für y_p :
Berechne n Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ so, dass $y_p = v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_nu_n$ Lösung von $Ly = r$ auf J wird. Wir fassen $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ zu den Vektorfunktionen $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ zusammen.

Der Ansatz für y_p lautet somit: $\vec{v} : J \to \mathbb{R}^n$ ist so zu berechnen, dass $y_p = \vec{v} \cdot \vec{u} \in \mathcal{L}_r$ gilt.

Satz 6.13. *Ist $\vec{v} = \vec{v}(x)$ Lösung des Gleichungssystems:*

$$\begin{cases} \vec{v}' \cdot \vec{u} & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}' & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}'' & = 0 \\ \vdots & \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}^{(n-2)} & = 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{u}^{(n-1)} & = r, \end{cases} \tag{6.4}$$

so gilt $L(\vec{v} \cdot \vec{u}) = r$ auf J.

Definition 6.2 (Wronski-Matrix von $\vec{u}$ (bzw. von $u_1, \ldots, u_n$))**.** Die (n, n)-Matrix, deren j-te Zeile $(j = 1, \ldots, n)$ $(\vec{u}^{(j-1)})^T$ ist, wird durch $W(x, \vec{u})$ bezeichnet und *Wronski-Matrix von $\vec{u}$* genannt. Hiermit lässt sich (6.4) in Matrixform so schreiben:

$$W(x, \vec{u})\, \vec{v}'(x) = r(x)\, \vec{e}_n, \quad x \in J \tag{6.5}$$

(mit $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$).

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass W für jedes $x \in J$ regulär ist. Hiermit folgt aus (6.5)

$$\vec{v}(x) = \vec{v}(c) + \int_c^x r(t)\, (W(t, \vec{u}))^{-1}\, \vec{e}_n \, \mathrm{d}t, \quad x, c \in J.$$

Satz 6.14. *$u_1, u_2, \ldots, u_n$ seien n l.u. Lösungen der homogenen linearen DGL n-ter Ordnung $L(y) = 0$ auf J. Eine Lösung y_p der inhomogenen Gleichung*

$L(y) = r$ auf J wird durch $y_p(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(x) v_j(x)$ mit

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (x) = \int_c^x r(t) \left(W(t, \vec{u})\right)^{-1} \vec{e}_n \, \mathrm{d}t, \quad x \in J,$$

gegeben. Hier ist $c \in J$ beliebig und $W(t, \vec{u})$ die Wronski-Matrix der Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

6.8 Regularität der Wronski-Matrix

Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n l.u. Lösungen von $L(y) = 0$ und $\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j$. Es gelten also $L(u_j) = u_j^{(n)} + p_1(x) u_j^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) u_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Setze $w(x) = \det\left(W(x, \vec{u})\right) = \det\left(\vec{u}(x),\ \vec{u}'(x), \ldots, \vec{u}^{(n-1)}(x)\right)$.

Satz 6.15. *Es gilt $w'(x) + p_1(x) w(x) = 0$, $x \in J$. Somit folgt für $c \in J$*

$$w(x) = w(c) \exp\left(-\int_c^x p_1(t) \, \mathrm{d}t\right), \quad x \in J.$$

Man hat $w(x) \neq 0$ für alle $x \in J$.

7 Lineare DGLn 2.Ordnung

7.1 Vorbereitung

Man gehe das 6. Kapitel mit $n = 2$ durch.

7.2 Reduktion der Ordnung

Satz 7.1. *Es sei $u \in \mathcal{L}_0$, $u \neq 0$. Ist v die allgemeine Lösung der Gleichung*

$$v'' + v'\left(2 \cdot \frac{u'}{u} + p_1\right) = \frac{r(x)}{u(x)}, \quad x \in J,$$

so ist $y = uv$ die allgemeine Lösung von

$$L(y) = y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = r(x).$$

Bemerkungen

(1) Diesen Satz kann man für lineare Gleichungen beliebiger Ordnung formulieren. (?)

(2) Vergleiche mit Abschnitt (6.7) Variation der Konstanten

7.3 Beispiele

(1) $y'' - y' \cos x + y \sin x = \sin x$

(2) $y''(x) + (1 - x^2)\, y(x) = 0$

7.4 Lineare DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

a, b seien reelle Konstanten, $r \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Gesucht sind alle Lösungen von

$$(Ly)(x) = y'' + 2ay' + by = r(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

1. Schritt (6.6 P1.) Gesucht sind zwei l.u. Lösungen u_1, u_2 von

$$y'' + 2ay' + by = 0.$$

1.Fall $a^2 > b$

$$\left.\begin{aligned} u_1(x) &= e^{-ax}e^{\sqrt{d}x} \\ u_2(x) &= e^{-ax}e^{-\sqrt{d}x} \end{aligned}\right. \quad \text{mit } d = a^2 - b.$$

2.Fall $a^2 = b$

$$u_1(x) = e^{-ax}$$
$$u_2(x) = xe^{-ax}$$

3.Fall $a^2 < b$

$$u_1(x) = e^{-ax}e^{\mathrm{i}\omega x}$$
$$u_2(x) = e^{-ax}e^{-\mathrm{i}\omega x}$$

mit $\omega = \sqrt{-d}$ oder zwei reelle l.u. Lösungen

$$\tilde{u}_1(x) = e^{-ax}\cos\omega x$$
$$\tilde{u}_2(x) = e^{-ax}\sin\omega x$$

2. Schritt (6.6, P2.)

$$Ly = r \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

(a) Mit Satz 7.1 aus Abschnitt 7.2 oder

(b) mit Variation der Konstanten oder

(c) mit Laplace Transformation (HM II).

Beispiel.

$$y'' + 2ay' + by = f_0 \cos\omega_1 x, \quad y, a, b, f_0, \omega_1 \text{ reell.} \tag{7.2}$$

$\tilde{y}$ sei Lösung von

$$y'' + 2ay' + by = f_0 e^{i\omega_1 x}. \tag{7.3}$$

Dann ist $y = \mathrm{Re}(\tilde{y})$ Lösung von (7.2). Zur Lösung von (7.3) mache den Ansatz

$$\tilde{y}(x) = \alpha e^{i\omega_1 x} = |\alpha| e^{i(\omega_1 x - \varphi)}.$$

Zu berechnen sind $|\alpha|$ und φ.

7.5 Die DGL vom Eulerschen Typ

Die DGL

$$x^2y'' + 2axy' + by = r(x), \quad x \neq 0 \tag{7.4}$$

mit konstantem a und b lässt sich auf (7.1) aus 7.4 zurückführen.

(a) Ist $y = \varphi(x)$ für $x > 0$ Lösung von (7.1), so ist $\phi(t) := \varphi(e^t)$ Lösung von

$$\ddot{\phi}(t) - \dot{\phi}(t) + 2a\dot{\phi}(t) + b\phi(t) = r(e^t) \tag{7.5}$$

Diese Gleichung ist vom Typ (7.1) aus 7.4. Aus $\phi(t)$ erhält man dann die Lösung φ für $x > 0$ gemäß

$$\varphi(x) = \phi(\ln x)$$

(b) Im Fall $x < 0$ sind entsprechend die folgenden Substitutionen durchzuführen:

$$\begin{aligned} x &\to t = \ln(-x) \\ t &\to x = -e^t \\ r(x) &\to r(-e^t) \\ \varphi(x) &\to \phi(t) = \varphi(-e^t) \end{aligned}$$

Übung. (i) Wie sieht in diesem Fall die zu (7.5) analoge Gleichung aus?

(ii) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$

(iii) $x^2y'' + xy' - y = \ln|x|, \; y(1) = 2, \; y'(1) = -1.$

8 Lösung mit Potenzreihen

(Methode von Frobenius, verallgemeinerter Potenzreihenansatz)

8.1 Der Ausgangspunkt. Beispiele.

(1) Gesucht ist die allgemeine Lösung der DGL

$$(Ly)(x) = x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \neq 0 \tag{8.1}$$

wobei $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$, $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$ für $|x| < R$ konvergente Potenzreihen mit reellen Koeffizienten p_j, q_j sind.

$x = 0$ heißt *Stelle der Bestimmtheit* oder *reguläre singuläre Stelle der DGL.*

Bemerkung $(x - x_0)^2y'' + (x - x_0)p(x - x_0)y' + q(x - x_0)y = 0$, $x \neq x_0$
Hier ist x_0 Stelle der Bestimmtheit. Durch Translation kann diese Gleichung leicht in die Form (8.1) gebracht werden.

(2) Beispiele aus der Physik, die hierher gehören: Legendre-DGL, Bessel-DGL, Laguerre-DGL, Hermite-DGL und ähnliche.

(3) Die einfachste Gleichung der Form (8.1) ist die Eulersche DGL

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \quad (a, b \text{ konstant}),\ x \neq 0$$

(siehe 7.5)

Anstelle des dort besprochenen Lösungsvorgehens kann man zur Lösung auch den Ansatz $y = \varphi(x) = |x|^{\varrho}$ mit zu berechnendem ϱ machen. Dies ist der einfachste Fall des im Folgenden beschriebenen verallgemeinerten Potenzreihenansatzes.

8.2 Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz

Zur Lösung von

$$(Ly)(x) = x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{für } x > 0 \text{ und } x < 0 \tag{8.2}$$

Es wird $x > 0$ **betrachtet** ($x < 0$ geht analog).

Ansatz

$$y(x,\varrho)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\varrho} \quad \text{für } x>0 \tag{8.3}$$

(für $x<0$: $y(x,\varrho)=(-x)^{\varrho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$) mit aus der DGL zu berechnenden c_k und ϱ. Geht man mit dem Ansatz in die DGL ein, so erhält man

$$Ly = x^{\varrho} f(\varrho) c_0 + x^{\varrho}\sum_{k=1}^{\infty}\left[f(\varrho+k)c_k+\sum_{m=0}^{k-1}\left((m+\varrho)p_{k-m}+q_{k-m}\right)c_m\right]x^k=0$$

mit $f(\varrho)=\varrho(\varrho-1)+\varrho p_0+q_0$. Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} &f(\varrho)c_0=0\\ &f(\varrho+k)c_k=-\sum_{m=0}^{k-1}\Big((m+\varrho)p_{k-m}+q_{k-m}\Big)c_m =: g_k(\varrho), \quad k\in\mathbb{N}\end{aligned} \tag{8.4}$$

8.3 Zur Berechnung der c_k und ϱ

Wir vermerken, dass die c_k von ϱ abhängen, durch die Schreibweise $c_k=c_k(\varrho)$. Im Fall $f(\varrho+k)\neq 0$ lassen sich die c_k aus der Rekursionsformel (8.4) berechnen. Bezeichnet man die Nullstellen von $f(\varrho)$ durch ϱ_1,ϱ_2, so erhält man

$$L_0 y = c_0(\varrho)(\varrho-\varrho_1)(\varrho-\varrho_2)x^{\varrho} \quad (=c_0 f(\varrho)x^{\varrho}) \tag{8.5}$$

mit y aus (8.3) und den c_k aus (8.4).
Da jedes c_k ein Vielfaches von c_0 ist, besagt (8.5), dass $Ly=0$ mit nichttrivialer Lösung y gilt für $\varrho=\varrho_1$ oder $\varrho=\varrho_2$. Mit ϱ_j werden aus (8.4) $c_k(\varrho_j)$ und hiermit $y_j=y(x,\varrho_j)$ berechnet.
Es sind also zunächst die Nullstellen von f zu berechnen, die sog. *Indexgleichung*

$$f(\varrho)=0$$

ist zu lösen.

8.4 Der reguläre Fall $p_0=q_0=q_1=0$

Dies bedeutet, dass

$$\frac{1}{x^2}L(y)=y''+(p_1+p_2x+\ldots)y'+(q_2+q_3x+\ldots)y$$

wird (d.h. $\frac{1}{x^2}Ly$ hat die Form von Ly aus Abschnitt 6.1 für $n = 2$).
Hier sind $\varrho_1 = 1, \varrho_2 = 0$. Man erhält mit $c_0 = 1$ in

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x,1) = x + c_1x^2 + c_2x^3 + \dots \qquad && (y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1) \\ y_2(x) &= y(x,0) = 1 + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \qquad && (y_2(0) = 1,\ y_2'(0) = 0) \end{aligned}$$

zwei Potenzreihen, die l.u. Lösungen für $Ly = 0$ für $x \neq 0$ darstellen.
Fazit: Im regulären Fall führt der "normale" Potenzreihenansatz zum Ziel.
Zur Übung behandle man nochmals Beispiel (2) aus 7.3.

8.5 Ab jetzt liegt der Fall $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ vor

In diesem Fall ist zugelassen (im Unterschied zum 6. Kapitel, siehe die Voraussetzungen in 6.1), dass die Koeffizienten von

$$\frac{1}{x^2}L(y) = y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y$$

bei y' eine Polstelle 1. Ordnung, und bei y eine Polstelle 2. Ordnung haben dürfen.

(1) $\varrho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\varrho_2 = \bar{\varrho}_1$.
Mit $c_0(\varrho_1)\,(= c_0(\varrho_2)) = 1$ und $c_k(\varrho_1)$ (bzw. $c_k(\varrho_2)$) aus (8.4) berechnet man $y(x, \varrho_1)$.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \operatorname{Re} y(x, \varrho_1) \\ y_2(x) &= \operatorname{Im} y(x, \varrho_1) \quad (= -\operatorname{Im} y(x, \varrho_2)) \end{aligned}$$

sind für $0 < x < R$ reelle l.u. Lösungen von $Ly = 0$.

Beispiel. $x^2y'' + xy' + y = 0$

(2) Ab jetzt sind $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ mit $\varrho_1 \geq \varrho_2$.

(a) $\varrho_1 > \varrho_2$, $\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$
Mit $c_0 = 1$ sind für ϱ_1 die $c_k(\varrho_1)$ für $k = 1, 2, \dots$ und für ϱ_2 die $c_k(\varrho_2)$ für $k = 1, 2, \dots$ aus (8.4) berechenbar. Man erhält zwei l.u. Lösungen für $L(y) = 0$:

$$y_1(x) = y(x, \varrho_1), \quad y_2(x) = y(x, \varrho_2).$$

(b) $\varrho_1 = \varrho_2$
Hier gilt $f(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)^2$. Es ist $f(\varrho_1 + k) = k^2 \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Wir setzen $c_0 = 1$. Dann können aus (8.4) die Koeffizienten $c_k(\varrho_1)$ berechnet werden. Man erhält eine Lösung

$$y_1(x) = y(x, \varrho_1) = x^{\varrho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k = x^{\varrho_1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k \right), \quad 0 < x < R.$$

Eine hiervon l.u. Lösung kann man etwa so erhalten: mit den $c_k(\varrho)$ aus (8.4), $c_0(\varrho) = 1$, gilt für

$$y(x, \varrho) = x^{\varrho} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varrho_1) x^k \right)$$

die Gleichung

$$Ly = x^{\varrho}(\varrho - \varrho_1)^2 \quad \text{(siehe (8.5))}.$$

Differenziere diese Gleichung nach ϱ:

$$\partial_{\varrho} L(y) = L(\partial_{\varrho} y) = x^{\varrho} \ln x (\varrho - \varrho_1)^2 + 2(\varrho - \varrho_1) x^{\varrho}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} y_2(x) &:= \left. (\partial_{\varrho} y(x, \varrho)) \right|_{\varrho = \varrho_1} \\ &= \ln(x) y_1(x) + x^{\varrho_1 + 1} \sum_{k=0}^{\infty} c'_{k+1}(\varrho_1) x^k \end{aligned}$$

eine zweite l.u. Lösung von $L(y) = 0$.

Beispiele. $x^2 y'' - 2xy' + \frac{9}{4} y = 0$
$xy'' + y' + xy = 0$.

(c) $\varrho_1 - \varrho_2 = N \in \mathbb{N}$
Es ist $f(\varrho_1 + k) = k(k + N) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit kann man $y_1(x) = y(x, \varrho_1)$ wie vorher mit $c_0 = 1$ und (8.4) berechnen.
Aus (8.4) ist $c_N(\varrho_2)$ wegen $f(\varrho_2 + N) = 0$ i. a. nicht zu berechnen, es sei denn (siehe (8.4)), es gilt

$$g_N(\varrho_2) := -\sum_{m=0}^{N-1} \left((m + \varrho_2) p_{N-m} + q_{N-m} \right) c_m = 0$$

Ist dies der Fall, wähle $c_N(\varrho_2)$ beliebig und berechne mit (8.4) alle $c_k(\varrho_2)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \neq N$, etwa mit $c_0 = 1$. Man erhält so $y_2(x) = y(x, \varrho_2)$, eine von y_1 l.u. Lösung.

Im Normalfall ($g_N(\varrho_2) \neq 0$) liefert (8.4) den Widerspruch $0 = g_N(\varrho_2)$. Wir können dann eine von y_1 l.u. Lösung y_2 so berechnen:
Wähle $c_0 = \varrho - \varrho_2$ und berechne $c_k(\varrho)$ aus (8.4) und bilde mit diesen c_k

$$y(x, \varrho) := x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varrho) x^k \quad (x > 0).$$

Es gilt (siehe (8.5)):

$$\begin{aligned} Ly &= (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)^2 x^\varrho \\ \Rightarrow \partial_\varrho (Ly)_{|\varrho=\varrho_2} &= L\left(\partial_\varrho y(x, \varrho)\right)\big|_{\varrho=\varrho_2} = 0. \end{aligned}$$

$y_2(x) = \partial_\varrho y(x, \varrho)_{|\varrho=\varrho_2}$ ist eine zweite von y_1 l.u. Lösung. Man macht sich klar, dass mit einer Konstanten a

$$y_2(x) = x^{\varrho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k'(\varrho_2) x^k + a\,(\ln x)\, y_1(x)$$

gilt.

Bemerkung Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz (8.3) liefert also in jedem Fall direkt mindestens eine Lösung von (8.1). Grundsätzlich kann dann stets eine l.u. Lösung mit dem Ansatz

$$y_2(x) = y_1(x) v(x)$$

(Reduktion der Ordnung, siehe Abschnitt 7.2) durch Berechnung von v bestimmt werden.

8.6 Zusammenfassender Satz für den Fall reeller ϱ_1, ϱ_2 und Stelle der Bestimmtheit x_0

Gegeben ist die DGL

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) p(x) y' + q(x) y = 0$$

mit

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j (x - x_0)^j, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (x - x_0)^j, \quad |x - x_0| < R.$$

Dann gibt es für $0 < |x - x_0| < R$ definierte l.u. Lösungen y_1, y_2 der Form

$$\begin{aligned} y_1(x) &= |x - x_0|^{\varrho_1} u_1(x) \\ y_2(x) &= A \cdot |x - x_0|^{\varrho_1} u_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^{\varrho_2} u_2(x) \end{aligned}$$

mit $u_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} (x - x_0)^k$, $c_0^{(j)} = 1$ $(j = 1, 2)$.
ϱ_1, ϱ_2 $(\varrho_1 \geq \varrho_2)$ sind die Nullstellen von $f(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0$.

Im Fall $\varrho_1 = \varrho_2$ ist $A = 1$.
Im Fall $\varrho_1 - \varrho_2 \in \mathbb{N}$ kann $A = 1$ oder $A = 0$ sein.
Im Fall $\varrho_1 \neq \varrho_2$, $\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$ ist $A = 0$.

Ergänzende Literatur (auch hinsichtlich Konvergenzfragen)

Rabenstein:	Introduction to Ordinary Differential Equations
Chorlton:	Ordinary Differential and Difference Equations

9 Lineare DGL Systeme 1. Ordnung

9.1 Das Problem. Die Vorgaben.

J sei ein Intervall in $\mathbb{R}$, $\vec{q} : J \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) ein stetiges Vektorfeld und $P : J \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ ($\mathbb{C}^{(n,n)}$) eine stetige matrixwertige Funktion: $P(t) = \big((P(t))_{jk}\big)$, $\big(P(t)\big)_{jk} = p_{jk}(t)$. P stetig bedeutet, dass $p_{jk} : J \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) für alle j, k stetig sind.

Es seien $t_0 \in J$ und $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) fest. Gesucht ist $\vec{y} \in C^1(J)$, $\vec{y} : J \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), mit

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= P(t)\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Zur Übung schreibe man (9.1) explizit etwa für $n = 4$ in Komponenten auf.

Satz 9.1. *Das Problem (9.1) hat unter den Voraussetzungen $P, \vec{q}$ stetig auf J genau eine Lösung $\vec{y}$, die auf J definiert ist.*

9.2 Ein Spezialfall von (9.1) ist das Problem aus 6.2 (Satz 6.2)

Es seien $r, a_1, \dots, a_n \in C(J)$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Es sei $y \in C^n(J)$ eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\, y^{(n-j)} &= r(t), \quad t \in J, \\ y^{(j)}(t_0) &= b_{j+1} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Definiere $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : J \to \mathbb{R}^n$ durch $y_1 := y$, $y_j := y'_{j-1}$ $(j = 2, \ldots, n)$. Dann gilt mit

$$\tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ \\ 0 & \ldots & & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{\tilde{q}}(t) = r(t)\,\vec{e}_n$, $\vec{\tilde{y}}_0 = \vec{b}$,

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= \tilde{P}(t)\,\vec{y} + \vec{\tilde{q}}(t), \quad t \in J \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{\tilde{y}}_0 \end{aligned} \tag{9.3}$$

(Dies ist ein spezielles Problem (9.1).)

Umgekehrt hat man: Ist $\vec{y} \in C^1(J)$ Lösung von (9.3), so gilt für y_1 (9.2). Die Theorie für Probleme (9.1) beinhaltet also die für Probleme (9.2).

Zur Übung und Erinnerung lese man nochmals den Fall $n = 1$ aus Kapitel 2, 2.4. Von dort können wir den Satz über die Struktur der Lösungen von (9.1) übernehmen:

Satz 9.2. *Die allgemeine Lösung von*

$$\vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J, \tag{9.4}$$

erhält man, indem man zur allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t), \quad t \in J, \tag{9.5}$$

eine spezielle Lösung $\vec{y}_p$ der Gleichung (9.4) addiert. (vgl. auch Satz 6.12).

Zum homogenen Problem

$$\vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t), \quad t \in J, \tag{9.6}$$

n Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ von (9.6) fassen wir zu einer (n,n)-Matrix

$$Y(t) = \left[\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right]$$

zusammen und betrachten

$$W(t) = W(t; \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) := \det Y(t).$$

Es gilt (Blatt 8, Aufgabe 4)

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur} P(s)\, ds\right).$$

Hieraus liest man ab

Satz 9.3. *Sind $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ Lösungen des homogenen Systems (9.6), so gilt mit $W(t) = \det(\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t))$:*
$\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ sind l.u. auf $J \Leftrightarrow W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$.

Satz 9.4. *(a) $\mathcal{L}_0 = \{\vec{y}: J \to \mathbb{R}^n,\ \vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t)\}$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.*

(b) n Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ bilden genau dann eine Basis von $\mathcal{L}_0$ (ein Fundamentalsystem), wenn gilt $\det(\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)) \neq 0$ für ein (und damit für alle) $t \in J$. In diesem Fall ist $\vec{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{y}_j(t)$ $\big(c_j \in \mathbb{R}$ beliebig, konstant$\big)$ die allgemeine Lösung von (9.6).

9.3 Matrixfunktionen

(Wir schreiben $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{(m,n)}$. Wir könnten im Folgenden ebenso mit $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{(m,n)}$ arbeiten. Siehe auch die Formulierungen unter 9.1)

J sei ein Intervall in $\mathbb{R}$. $P : J \to \mathbb{R}^{(m,n)}$ heißt Matrixfunktion. Die Elemente von $P(t)$ werden wie in HM II (siehe auch schon 9.1 hier) durch $\big(P(t)\big)_{jk}$ oder auch durch $p_{jk}(t)$ bezeichnet. Die $p_{jk} : J \to \mathbb{R}$ sind die Komponentenfunktionen. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit, Konvergenz werden über die Komponenten(funktionen) erklärt:

P ist stetig, differenzierbar, integrierbar, falls p_{jk} für jedes Paar j,k stetig, differenzierbar, integrierbar ist.

$P'(t)$ ist die durch $\big(P'(t)\big)_{jk} := p'_{jk}(t)$, $t \in J$, definierte (m,n)- Matrix. Analog ist $\int_a^b P(t)\,dt$ die $(m,n)-$ Matrix mit den Elementen $\left(\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t\right)_{jk} := \int_a^b p_{jk}(t)\,\mathrm{d}t$.

Übung. (1) Sind $P, Q : J \to \mathbb{R}^{(m,n)}$ differenzierbar auf J, so gilt $(P+Q)' = P' + Q'$.

(2) $P : J \to \mathbb{R}^{(m,n)}$, $Q : J \to \mathbb{R}^{(n,l)}$ seien differenzierbar auf J. Es gilt $\big(PQ\big)' = P'Q + PQ'$.

9.4 Reihen von Matrizen. Konvergenz. Norm.

Definition 9.1. $C_1, C_2, \ldots$ sei eine Folge von (m,n)-Matrizen,
$\big(C_k\big)_{jl} = c_{jl}^{(k)}$, $j = 1, \ldots, m;\ l = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots$.
$\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ heißt **konvergent**, falls alle mn Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} c_{jl}^{(k)}$ konvergieren.
$\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ ist dann die (m,n)-Matrix $C = (c_{jl})$ mit $c_{jl} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jl}^{(k)}$ $\Big(= \big(C\big)_{jl}\Big)$.

Definition 9.2 (Norm auf $\mathbb{C}^{(m,n)}$)**.**

$$\|A\| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |(A)_{jl}|,\ A \in \mathbb{C}^{(m,n)}.$$

Satz 9.5. *(1)* $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|\,,\ \ A,\, B \in \mathbb{C}^{(m,n)}$

(2) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|\,,\ \ A \in \mathbb{C}^{(m,n)},\, B \in \mathbb{C}^{(n,p)}$

(3) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|\,,\ \ \lambda \in \mathbb{C},\, A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$

Folgerung 9.1. *Für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$.*

Satz 9.6. *Es sei $\big(C_k\big)$ eine Folge von (m,n)-Matrizen. Dann gilt: Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$.*

9.5 $\exp(A)$ für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Definition 9.3. Für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist die (n,n)-Matrix $\exp(A)$ wie folgt definiert:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Hierbei ist $A^0 = E$. Für $\exp(A)$ wird auch e^A geschrieben.

Bemerkungen

(1) $\exp(E) = eE$

(2) $\|\exp(A)\| \leq \exp\big(\|A\|\big)$

(3) $\exp(0) = E$

9.6 Die DGL für e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Satz 9.7. *Für $E(t) = e^{tA}$ gelten:*

$$E'(t) = E(t)A = AE(t).$$

9.7 Die Matrixdifferentialgleichung $F'(t) = AF(t)$. Eindeutigkeitssatz.

Satz 9.8. *Für jede (n,n)-Matrix A und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$e^{tA}e^{-tA} = E.$$

Also: e^{tA} ist eine reguläre (n,n)-Matrix mit $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

Satz 9.9 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Es seien A, B konstante (n,n)-Matrizen. Dann ist F mit $F(t) = \exp(tA)B$ die einzige Matrixfunktion, für die*

$$\begin{aligned} F'(t) &= AF(t), \quad t \in J, \\ F(0) &= B \end{aligned}$$

erfüllt sind.

9.8 $\exp(A)\exp(B)$

Satz 9.10. *Für (n,n)-Matrizen A, B mit $AB = BA$ gilt*

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

Folgerung 9.2.

$$\exp(sA)\exp(tA) = \exp\big((s+t)A\big), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

9.9 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Satz 9.11. *Es seien A eine konstante (n,n)-Matrix, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$. Das AWP*

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= A\,\vec{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \vec{y}(a) &= \vec{y}_0 \end{aligned}$$

hat die Lösung $\vec{y}(t) = e^{(t-a)A}\vec{y}_0$.

9.10 Berechnen von $\exp(tA)$

(1) Mit $\mathbf{A} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $\big((n,n)$-Diagonalmatrix mit den Spalten $\lambda_k \vec{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n\big)$ gilt

$$e^{tA} = \operatorname{diag}\big(e^{t\lambda_1},\, e^{t\lambda_2},\, \ldots,\, e^{t\lambda_n}\big), \;\; t \in \mathbb{R}.$$

(2) A **sei diagonalisierbar.** Es gibt dann eine reguläre Matrix C derart, dass $C^{-1}AC = D$ (Diagonalmatrix) ist (vgl. HM II).
Dann gilt:

$$e^{tA} = C e^{tD} C^{-1}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

9.11 Inhomogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Satz 9.12. *Es seien A eine konstante (n,n)-Matrix, $\vec{q} : J \to \mathbb{R}^n$, $\vec{q} = \vec{q}(t)$, eine stetige Vektorfunktion, $a \in J$ und $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Das AWP für eine C^1-Vektorfunktion $\vec{y} = \vec{y}(t)$ mit*

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= A\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \;\; t \in J, \\ \vec{y}(a) &= \vec{y}_0 \end{aligned}$$

besitzt genau eine Lösung, die explizit durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-a)A}\vec{y}_0 + \int_a^t e^{(t-\tau)A}\vec{q}(\tau)\, d\tau, \;\; t \in J,$$

gegeben ist.

9.12 Das Problem (9.1) aus 9.1. Variation der Konstanten.

(1) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $t_0 = 0$ gesetzt werden. Es liegt also das Problem

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= P(t)\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J, \\ \vec{y}(0) &= \vec{y}_0 \end{aligned} \tag{9.7}$$

vor. (mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 9.1)

(2) Das homogene Problem (9.7) $\big(\vec{q} = \vec{0}\big)$ besitzt n l.u. Lösungen $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$. Die hiermit gebildete reguläre (n,n)-Matrix

$$\phi(t) := \Big[\vec{\phi}_1(t),\, \vec{\phi}_2(t), \ldots,\, \vec{\phi}_n(t)\Big], \;\; t \in J,$$

heißt **Fundamentalmatrix** für das homogene System.

$\vec{y}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\vec{y}_0$ ist die Lösung des homogenen Problems (1):

$$\vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t), \;\; t \in J,$$
$$\vec{y}(0) = \vec{y}_0.$$

(3) **Zur Lösung des inhomogenen Problems (9.7)**

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist durch $\vec{y}(t) = \phi(t)\,\vec{c}$ mit einem beliebigen festen Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Zur Lösung von (9.7) wird der Ansatz (**Variation der Konstanten**)

$$\vec{y}(t) = \phi(t)\,\vec{v}(t) \tag{9.8}$$

mit einer zu berechnenden Funktion $\vec{v}$ gemacht.

Die Forderung, dass $\vec{y}$ Lösung von (9.7) ist, und die Eigenschaft von ϕ: $\phi'(t) = P(t)\,\phi(t)$, ergeben $\vec{v}\,'(t) = \phi^{-1}(t)\,\vec{q}(t)$. Man erhält die Lösung von (9.7) in der Form

$$\vec{y}(t) = \phi(t)\,\phi^{-1}(0)\,\vec{y}_0 + \int_0^t \phi(t)\,\phi^{-1}(s)\,\vec{q}(s)\,ds, \quad t \in J. \tag{9.9}$$

Bemerkung: $\vec{y}_p(t) := \int_0^t \phi(t)\,\phi^{-1}(s)\,\vec{q}(s)\,ds, \;\; t \in J$ löst das Problem

$$\vec{y}\,'(t) = P(t)\,\vec{y}(t) + \vec{q}(t), \quad t \in J,$$
$$\vec{y}(0) = \vec{0}.$$

Die Funktion $\phi(t)\phi^{-1}(s)$ heißt **Greensche Funktion** des AWP. Sie wird durch $G(t,s)$ bezeichnet:

$$G(t,s) = \phi(t)\,\phi^{-1}(s), \quad t,s \in J.$$

Als Funktion von t ist $G(t,s)$ Lösung des Matrix-Problems

$$Y'(t) = P(t)\,Y(t), \quad t \in J$$
$$Y(s) = E.$$

Übung. (1) Schreibe 9.12 auf mit $P(t) = A =$ konstant. Dann erhält man wieder die Lösungsdarstellung aus Satz 9.12, 9.11.
Welches ist die Greensche Funktion für das Problem aus Satz 9.12, 9.11?

(2) Man mache die Probe: Rechne nach, dass $\vec{y}$ aus (9.9) Lösung von (9.7) ist.

Teil II

Partielle Differentialgleichungen

10 Die Transportgleichung. Die Wellengleichung.

10.1 Einfache Beispiele

1. Wir schreiben $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ als Argument von Funktionen, $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ (Gebiet). α sei konstant.

$$\big(D_1 u\big)(\vec{x}) = \alpha$$

hat die Lösungen $u(\vec{x}) = \alpha x_1 + w(x_2, \ldots, x_n)$ mit einer beliebigen C^1-Funktion w in den Variablen $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

2. α konstant. Die C^2-Lösungen von

$$\big(D_1 D_2 u\big)(x_1, x_2) = \alpha$$

sind durch

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2 + w_2(x_2) + w_1(x_1)$$

mit beliebigen C^1-Funktionen w_1, w_2 einer Variablen gegeben.

Übung. Welches sind die Lösungen von $\big(D_1 D_2 u\big)(\vec{x}) = \alpha$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$?

3. Es sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, und α konstant gegeben.

Die Lösungen $u \in C^1(D),\ D \subset \mathbb{R}^n$, der Gleichung

$$\vec{a}\,\cdot \nabla u(\vec{x})\big(= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j D_j u(\vec{x})\big) = \alpha$$

sind wie folgt gegeben:

$$u(\vec{x}) = \alpha \left(A^{-1}\vec{x}\right)_1 + w\big((A^{-1}\vec{x})_2, \ldots, (A^{-1}\vec{x})_n\big)$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion w in $(n-1)$ Variablen. A ist eine reguläre (n, n)-Matrix, deren 1. Spalte $\vec{a}$ ist.

Übung. Spezialisieren Sie dies für den Fall $n = 2$.

10.2 Die Transportgleichung

Gesucht ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2),\ u = u(x,t)$, mit

$$\big(D_2u\big)(x,t) \pm c\big(D_1u\big)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Hier ist c eine positive Konstante.

Satz 10.1. *Lösungen der DGLn*

(1) $\big(D_2u\big)(x,t) + c\big(D_1u\big)(x,t) = 0,$

(2) $\big(D_2u\big)(x,t) - c\big(D_1u\big)(x,t) = 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^2,$

sind $u(x,t) = \varphi(x-ct)$ *bzw.* $u(x,t) = \psi(x+ct)$ *mit beliebigen* C^1*-Funktionen* φ, ψ.

Satz 10.2. *Für* $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *seien*

$$\begin{aligned}\big(D_2u\big)(x,t) - c\big(D_1u\big)(x,t) = 0,&\ \ (x,t) \in \mathbb{R}^2,\\ u(x,0) = 0,&\ \ x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

erfüllt. Dann gilt $u(x,t) = 0$ *für alle* $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Satz 10.3. *Alle* C^1*-Lösungen der Gleichung*

$$\big(D_2u\big)(x,t) - c\big(D_1u\big)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man durch $u(x,t) = \psi(x+ct)$ *mit beliebigen Funktionen* $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Übung. Formulieren und begründen Sie Sätze 2 und 3 für die Gleichung (1).

Bemerkung Um die Operation (Vorschrift), die in (1), (2) auf u wirkt, zu betonen, schreiben wir auch

$$\begin{aligned}\text{anstelle von (1): } \big(D_2 + cD_1\big)\, u(x,t) = 0,\\ \text{anstelle von (2): } \big(D_2 - cD_1\big)\, u(x,t) = 0.\end{aligned}$$

10.3 Die inhomogene Transportgleichung

Gegeben sind $f = f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2),\ g = g(x) = C(\mathbb{R})$.
Gesucht sind $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, mit

$$\begin{aligned}\big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) = f(x,t),&\quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,\\ u(x,0) = g(x),&\quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{P}$$

Satz 10.4. *Sind* $g \in C^1(\mathbb{R})$ *und* $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$*, so wird durch*

$$u(x,t) = g(x+ct) + \int_0^t f(x - c(s-t), s)\,\mathrm{d}s, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

die Lösung von (P) gegeben.

Bemerkung u aus Satz 10.4 ist $u = u_1 + u_2$, wobei u_1 Lösung des Problems

$$\begin{aligned}\big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) &= 0,\\ u(x,0) &= g(x)\end{aligned}$$

und u_2 Lösung des Problems

$$\begin{aligned}\big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) &= f(x,t),\\ u(x,0) &= 0\end{aligned}$$

ist.
$u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, kann man so erhalten (Methode von **Duhamel**):
Löse für jedes s mit $0 \le s \le t$ das Problem

$$\begin{aligned}\big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \ge s\\ u(x,s) &= f(x,s), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nenne diese Lösung $w(x,t;s)$. Dann gilt

$$u_2(x,t) = \int_{s=0}^{t} w(x,t;s)\,\mathrm{d}s. \tag{10.1}$$

Es ist $w(x,t;s) = f(x - c(s-t); s)$.

Übung. Man mache die Probe, dass u_2 aus (10.1) Lösung des Problems

$$\begin{aligned}\big(D_2 - cD_1\big)u(x,t) &= f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0\\ u(x,0) &= 0\end{aligned}$$

ist.

10.4 Die eindimensionale Wellengleichung

1. $c > 0$ sei eine gegebene Konstante. Gesucht ist $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\big(D_2^2 - c^2 D_1^2\big)u(x,t) = 0. \tag{10.2}$$

Es werden neue Variablen ξ, τ eingeführt durch

$$\begin{aligned} x &= c(\xi + \tau), & t &= \xi - \tau\\ \xi &= \frac{1}{2c}(x + ct), & \tau &= \frac{1}{2c}(x - ct)\end{aligned}$$

Für die Funktion v, $v(\xi,\tau) := u(c(\xi+\tau),\ \xi-\tau)$, gilt, wenn u der Gleichung (10.2) genügt:

$$\big(D_1 D_2 v\big)(\xi,\tau) = 0.$$

Man erhält $v(\xi,\tau) = w_1(\xi) + w_2(\tau)$ mit beliebigen genügend differenzierbaren Funktionen w_1, w_2 einer Variablen. Rücktransformation auf die Variablen x, t liefert den

Satz 10.5. *Jede C^2-Lösung $u = u(x,t)$ der Gleichung*

$$\big(D_2^2 u\big)(x,t) - c^2\big(D_1^2 u\big)(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{10.3}$$

hat die Form $u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$ mit beliebigen C^2-Funktionen φ, ψ.

Bemerkung: Anderes Vorgehen zur Lösung von (10.3).

(10.3) wird so geschrieben:

$$\big(D_2 - cD_1\big)\big(D_2 + cD_1\big)u(x,t) = 0 \tag{10.4}$$

Hiermit wird das Lösen von (10.3) zurückgeführt auf das Lösen zweier Probleme (gemäß 10.2, 10.3).

Berechne $v = v(x,t)$ aus

$$\big(D_2 - cD_1\big)v(x,t) = 0 \tag{10.5}$$

und dann $u = u(x,t)$ aus

$$\big(D_2 + cD_1\big)u(x,t) = v(x,t). \tag{10.6}$$

(10.4) ist äquivalent zu (10.5), (10.6).
(10.5) wird mit Satz 10.3 und (10.6) mit Satz 10.4 gelöst. Man findet den Satz 10.5 wieder.

2. Zur Lösung **der eindimensionalen inhomogenen Wellengleichung**

$$\big(D_2^2 u\big)(x,t) - c^2\big(D_1^2 u\big)(x,t) = f(x,t) \tag{10.7}$$

gehen wir wie in der vorhergehenden Bemerkung vor. (10.7) wird als System von Gleichungen erster Ordnung geschrieben:

$$\big(D_2 v\big)(x,t) - c\big(D_1 v\big)(x,t) = f(x,t)$$
$$\big(D_2 u\big)(x,t) + c\big(D_1 u\big)(x,t) = v(x,t)$$

Mit **Satz 10.4** kann u berechnet werden.

Satz 10.6. *Die Lösung u der Gleichung (10.7), die $u(x,0) = D_2u(x,0) = 0$ erfüllt, ist*

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{s=0}^{t}\Big(\int_{\tau=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2.$$

3. Die **Cauchysche Anfangswertaufgabe** (AWA).
   Die **d'Alembertsche Formel.**

Satz 10.7. *Die Cauchysche AWA für die eindimensionale Wellengleichung*

$$\begin{aligned}\big(D_2^2 - c^2 D_1^2\big)u(x,t) &= f(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2,\\ u(x,0) &= g(x), \quad x\in\mathbb{R}\\ D_2u(x,0) &= h(x), \quad x\in\mathbb{R},\end{aligned}\tag{10.8}$$

mit gegebenen genügend gutartigen Funktionen f, g, h hat die Lösung

$$\begin{aligned}u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x+ct)+g(x-ct)\big) &+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\ &+\frac{1}{2c}\int_{s=0}^{t}\Big(\int_{\tau=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{10.9}$$

Bemerkungen

(i) (10.9) erhält man durch Kombination der Ergebnisse vorher und indem man (10.8) in zwei Probleme zerlegt:
Das Problem mit $f = 0$ und das Problem mit $g = h = 0$. Die Summe der Lösungen dieser (halbhomogenen) Probleme ist (10.9).

(ii) (10.9) mit $f = 0$ heißt d'Alembertsche Formel.

Übung. (a) Rechnen Sie nach, dass u aus (10.9) die AWA (10.8) erfüllt.

(b) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals mit f.