UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2009
21.09.2009

Bachelor–Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Setzt man in

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

die Anfangswerte $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ ein, so erhält man für die Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 2.$$

Wendet man die Laplacetransformation auf die gegebene Differentialgleichung an, so ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s+2} &= \mathscr{L}\{e^{-2t}\}(s) = \mathscr{L}\{y'' + 5y' + 6y\}(s) = s^2\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 2 + 5s\,\mathscr{L}\{y\}(s) + 6\,\mathscr{L}\{y\}(s) \\ &= (s^2 + 5s + 6)\mathscr{L}\{y\}(s) - 2\end{aligned}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}\Big(\frac{1}{s+2} + 2\Big) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\,\frac{2s+5}{s+2} = \frac{2s+5}{(s+2)^2(s+3)}\,.$$

Da -2 eine doppelte und -3 eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms ist, lautet der Ansatz einer Partialbruchzerlegung

$$\frac{2s+5}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+3}$$

für gewisse $A, B, C \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $A = B = 1$, $C = -1$, so dass

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+3)} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (e^{-2t} + te^{-2t} - e^{-3t})\sigma(t)$$

gilt. Also löst die durch

$$y(t) = (1+t)e^{-2t} - e^{-3t}$$

definierte Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ das gegebene Anfangswertproblem.

b) Die Übertragungsfunktion des gegebenen Systems lautet

$$G(s) = \frac{2s+5}{s^2+5s+6}\,.$$

i) Wegen

$$G(s) = \frac{(s+2)+(s+3)}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(t)$$

ist $g(t) = (e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(t)$ die zugehörige Impulsantwort.

ii) Für die Sprungantwort gilt

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2s+5}{s(s+2)(s+3)} =: H(s).$$

Da H die einfachen Polstellen $0, -2, -3$ besitzt, lautet der Ansatz einer Partialbruchzerlegung

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

für gewisse $A, B, C \in \mathbb{R}$. Man erkennt, dass $h(t)$ eine Linearkombination von $1, e^{-2t}, e^{-3t}$ ist. Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} h(t)$ und der Endwertsatz liefert

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{5}{6}\,.$$

c) Die Funktion f ist stückweise glatt. Nach einem Resultat der Vorlesung ergibt sich für die distributionelle Ableitung

$$D(T_f) = T_h + \big(f(\pi/2+) - f(\pi/2-)\big)\delta_{\pi/2} + \big(f(\pi+) - f(\pi-)\big)\delta_\pi = T_h + \delta_{\pi/2} - \delta_\pi\,,$$

wobei

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \pi/2 \\ \cos(t) & \text{für } t \in [\pi/2, \pi) \\ -\sin(t) & \text{für } t \geqslant \pi \end{cases}$$

gesetzt ist.

Aufgabe 2

a) Der Integrand $F(z) := \frac{z-1}{z^3+z^2} = \frac{z-1}{z^2(z+1)}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ holomorph. Da die Singularitäten 0 und -1 innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$ liegen, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} \frac{z-1}{z^3+z^2}\, dz = 2\pi i\big(\operatorname{res}(F;\, 0) + \operatorname{res}(F;\, -1)\big).$$

Da 0 eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms von F ist und der Zähler von F in 0 nicht verschwindet, hat F in 0 eine Polstelle zweiter Ordnung. Deshalb gilt

$$\operatorname{res}(F;\, 0) = \frac{d}{dz}\Big(z^2 F(z)\Big)\Big|_{z=0} = \frac{d}{dz}\,\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=0} = \frac{2}{(z+1)^2}\Big|_{z=0} = 2.$$

Da -1 eine einfache Polstelle von F ist, gilt

$$\operatorname{res}(F;\, -1) = \Big((z+1)F(z)\Big)\Big|_{z=-1} = \frac{z-1}{z^2}\Big|_{z=-1} = -2.$$

Zusammen erhält man

$$\int_{|z|=2} F(z)\, dz = 0.$$

b) Der Integrand $F(z) := \frac{e^z}{(z-1)(z+2)}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{-2, 1\}$ holomorph. Nur die Singularität 1 liegt innerhalb des Integrationsweges $|z - i| = 2$. Da 1 eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms von F ist und der Zähler von F in 1 nicht verschwindet, besitzt F in 1 eine Polstelle erster Ordnung. Deshalb ist

$$\operatorname{res}(F;\, 1) = (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{e^z}{z+2}\Big|_{z=1} = \frac{e}{3}$$

und nach dem Residuensatz gilt

$$\int_{|z-i|=2} F(z)\, dz = 2\pi i\ \operatorname{res}(F;\, 1) = \frac{2e\pi i}{3}\,.$$

c) Der Integrand $F(z) := z^2 e^{1/z}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph und besitzt in 0 eine wesentliche Singularität. Aus der Reihenentwicklung

$$z^2 e^{1/z} = z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/z)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^{k-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^2} + \dots$$

lässt sich $\operatorname{res}(F;\, 0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ ablesen. Da 0 innerhalb des Integrationsweges $|z| = 3$ ist, erhält man nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=3} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;\, 0) = \frac{\pi i}{3}\,.$$