Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2011
19.09.2011

Bachelor–Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) **i)** Der Integrand $f(z) := \frac{e^z}{z^3+2z^2} = \frac{e^z}{z^2(z+2)}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$ holomorph. Da nur die Singularität 0 innerhalb des Integrationsweges γ liegt, gilt nach dem Residuensatz

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,\,0)\,.$$

Da 0 eine zweifache Nullstelle des Nennerpolynoms von f ist und der Zähler von f in 0 nicht verschwindet, besitzt f in 0 eine Polstelle zweiter Ordnung. Deshalb ergibt sich für das Residuum von f in 0

$$\mathrm{Res}(f,\,0) = \frac{d}{dz}\Big(z^2 f(z)\Big)\Big|_{z=0} = \frac{d}{dz}\,\frac{e^z}{z+2}\Big|_{z=0} = \frac{e^z(z+1)}{(z+2)^2}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4}$$

und somit

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,\,0) = \frac{\pi i}{2}\,.$$

ii) Für die durch $f(z) := \cos z$ definierte, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f gilt $f^{(9)}(z) = -\sin z$ und wegen $|\pi/4| < 1$ ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\pi/4)^{10}}\,dz = \frac{2\pi i}{9!}\,f^{(9)}(\pi/4) = \frac{2\pi i}{9!}\,\frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}\pi i}{9!}\,.$$

b)

A1b) gesucht ist in der Entwicklung um 0 in $0<|z|<1$ der Koeffizient von $\frac{1}{z}$:

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{z^k} = -\left(1+z+z^2+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

liest man leicht ab $= \cdots\cdots - \frac{1}{z}\Big(\underbrace{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots}_{=e-1}\Big) + \cdots$

also: $\underline{\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z}};\,0\right) = 1-e}$

Aufgabe 2

a) Setzt man in

$$\mathscr{L}(y'')(s) = s^2\mathscr{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0)$$

die Anfangswerte $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$ ein, so erhält man für die Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\mathscr{L}(y'')(s) = s^2\mathscr{L}(y)(s) - 3s - 2\,.$$

Wendet man die Laplacetransformation auf die gegebene Differentialgleichung an, so ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2} &= \mathscr{L}(th(t))(s) = \mathscr{L}(y'' - y)(s) = \big(s^2\mathscr{L}(y)(s) - 3s - 2\big) - \mathscr{L}(y)(s)\\ &= (s^2 - 1)\mathscr{L}(y)(s) - 3s - 2\end{aligned}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{\frac{1}{s^2} + 3s + 2}{s^2 - 1} = \frac{1 + 3s^3 + 2s^2}{s^2(s-1)(s+1)}\,.$$

Das Nennerpolynom besitzt in 0 eine Nullstelle zweiter Ordnung und in $-1, 1$ jeweils Nullstellen erster Ordnung. Damit lautet der Ansatz einer Partialbruchzerlegung

$$\frac{1 + 3s^3 + 2s^2}{s^2(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1}$$

für gewisse $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $A = D = 0$, $B = -1$ und $C = 3$, so dass

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{-1}{s^2} + \frac{C}{s-1} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (-t + 3e^t)h(t)$$

gilt. Also löst die durch

$$y(t) = -t + 3e^t$$

definierte Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ das gegebene Anfangswertproblem.

b) Um eine Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau = t\sin t \qquad \text{für alle } t \geqslant 0$$

anzugeben, schreiben wir die linke Seite mit Hilfe der Faltung

$$(y * (h\,\sin))(t) = t\sin t \qquad \text{für alle } t \geqslant 0$$

und verwenden den Faltungssatz. Für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$ gilt

$$\mathscr{L}(y)(s)\,\cdot\,\mathscr{L}(h\,\sin)(s) = \mathscr{L}(h(t)t\sin t)(s)\,.$$

Hieraus folgt wegen $h(t)\sin(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s^2+1}$ und $h(t)t\sin t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; -\frac{d}{ds}\mathscr{L}(h\sin)(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

$$\mathscr{L}(y)(s)\,\cdot\,\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{2s}{s^2+1} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; 2\cos(t)\,.$$

Somit löst die durch $y(t) := 2\cos(t)$ definierte Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die gegebene Gleichung.