Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Herbst 2012
17.09.2012

Bachelor–Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Setzt man in

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

die Anfangswerte $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ ein, so erhält man für die Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 1 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - s - 2\,.$$

Wendet man die Laplacetransformation auf die gegebene Differentialgleichung an, so ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re} s$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-3} &= \mathscr{L}\{e^{3t}\}(s) = \mathscr{L}\{y'' - 6y' + 9y\}(s) \\ &= \big(s^2\,\mathscr{L}\{y\}(s) - s - 2\big) - 6\big(s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 1\big) + 9\,\mathscr{L}\{y\}(s) \\ &= (s^2 - 6s + 9)\mathscr{L}\{y\}(s) - s + 4\end{aligned}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{(s-3)^2}\left(\frac{1}{s-3} + s - 4\right) = \frac{1}{(s-3)^3} + \frac{(s-3)-1}{(s-3)^2} \\ &= \frac{1}{(s-3)^3} + \frac{1}{s-3} - \frac{1}{(s-3)^2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{3t}\big(\tfrac{1}{2}t^2 + 1 - t\big)\sigma(t)\,.\end{aligned}$$

Also löst die durch

$$y(t) = e^{3t}\big(\tfrac{1}{2}t^2 - t + 1\big)$$

definierte Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ das gegebene Anfangswertproblem.

b) Die Sprungantwort eines Systems ist das Ausgangssignal y des Systems, wenn sich das System vor $t = 0$ im Ruhezustand befindet und am Eingang der Einheitssprung $u = \sigma$ angelegt wird. Ist das System durch die Differentialgleichung $ay''' + by'' + cy' + dy = u$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$) gegeben, so führt Laplacetransformation auf

$$(as^3 + bs^2 + cs + d)\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathscr{L}\{y\}(s) = \underbrace{\frac{1}{as^3 + bs^2 + cs + d}}_{=:G(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

($s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re} s$). Die Polstellen von G sind im Poldiagramm dargestellt.

i) Hier liegen die Polstellen von G bei -2, i, $-i$. Partialbruchzerlegung ergibt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-i} + \frac{C}{s+i} + \frac{D}{s} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \big(Ae^{-2t} + Be^{it} + Ce^{-it} + D\big)\sigma(t)$$

für gewisse Konstanten $A,B,C,D \in \mathbb{R}$. Wegen des Terms $Be^{it} + Ce^{-it}$ handelt es sich bei y um eine Schwingung, deren Amplitude weder ab- noch zunimmt. Daher kommt nur **A** als zugehörige Sprungantwort in Frage.

ii) Hier gilt für die Laplacetransformierte der Sprungantwort

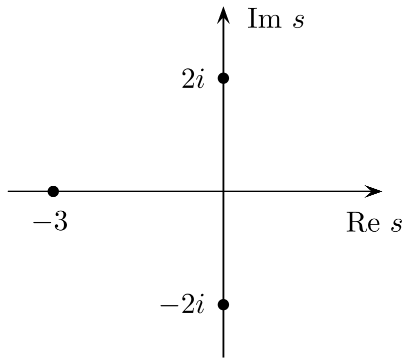
$$\mathscr{L}\{y\}(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{1}{2}\, t^2\, \sigma(t)\,.$$

Demnach ist **D** die zugehörige Sprungantwort.

iii) Wegen

$$\mathscr{L}\{h\}(s) = \frac{-4}{s+3} - \frac{9s}{s^2+4} - \frac{12}{s^2+4} + \frac{13}{s} \qquad (s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} s > 0)$$

sind die -3, $-2i$ und $2i$ die Polstellen der Übertragungsfunktion G, so dass sich folgendes Poldiagramm ergibt:



c) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0, \pi\}$ differenzierbar mit

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 2t & \text{für } t \in (0, \pi) \\ -\sin(t) & \text{für } t \in (\pi, \infty) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pi\})$$

und hat in 0 sowie π Sprungstellen. Definiert man

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto \begin{cases} f'(t) & \text{für } t \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pi\} \\ 0 & \text{für } t \in \{0, \pi\} \end{cases}\,,$$

so ergibt sich gemäß einer Formel aus der Vorlesung für die distributionelle Ableitung von f

$$\begin{aligned} DT_f &= T_g + \big(f(0+) - f(0-)\big)\delta_0 + \big(f(\pi+) - f(\pi-)\big)\delta_\pi \\ &= T_g + \big(1 - 0\big)\delta_0 + \big(-1 - (\pi^2 + 1)\big)\delta_\pi = T_g + \delta_0 - (\pi^2 + 2)\delta_\pi\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Der Integrand $F(z) := \frac{1}{(z^2-1)(z-2)^3} = \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-2)^3}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1, 2\}$ holomorph. Da -1 bzw. 1 eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms von F ist und der Zähler von F in -1 bzw. 1 nicht verschwindet, besitzt F in -1 bzw. 1 jeweils eine Polstelle erster Ordnung. Deshalb ergibt sich für die Residuen

$$\operatorname{res}(F; -1) = (z+1)F(z)\Big|_{z=-1} = \frac{1}{(z-1)(z-2)^3}\Bigg|_{z=-1} = \frac{1}{54}$$

und

$$\operatorname{res}(F; 1) = (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{1}{(z+1)(z-2)^3}\Bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Da 2 eine dreifache Nullstelle des Nennerpolynoms von F ist und der Zähler von F in 2 nicht verschwindet, besitzt F in 2 eine Polstelle dritter Ordnung. Deshalb ergibt sich für das Residuum von F in 2

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(F;2) &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-2)^3F(z)\Big)\Big|_{z=2} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z^2-1}\Big|_{z=2} = -\frac{d}{dz}\frac{z}{(z^2-1)^2}\Big|_{z=2}\\ &= -\frac{(z^2-1)^2 - z(z^2-1)4z}{(z^2-1)^4}\Big|_{z=2} = \frac{3z^2+1}{(z^2-1)^3}\Big|_{z=2} = \frac{13}{27}\,.\end{aligned}$$

Im Fall $r \in (0,1)$ liegt keine Singularität von F innerhalb der Integrationskurve $|z| = r$. Somit verschwindet das Integral $\int_{|z|=r} F(z)\,dz$ nach dem Residuensatz.

Im Fall $r \in (1,2)$ liegen nur die beiden Singularitäten -1 und 1 innerhalb der Integrationskurve $|z| = r$. Daher gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=r} F(z)\,dz = 2\pi i\big(\operatorname{res}(F;-1) + \operatorname{res}(F;1)\big) = 2\pi i\left(\frac{1}{54} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{26}{27}\,\pi i\,.$$

Im Fall $r > 2$ liegen alle drei Singularitäten von F innerhalb der Integrationskurve $|z| = r$. Deshalb liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=r} F(z)\,dz = 2\pi i\big(\operatorname{res}(F;-1) + \operatorname{res}(F;1) + \operatorname{res}(F;2)\big) = 2\pi i\left(\frac{1}{54} - \frac{1}{2} + \frac{13}{27}\right) = 0\,.$$

b) Als Hintereinanderausführung holomorpher Funktionen ist die durch $G(\zeta) := e^{-\zeta}\sin\zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}$, definierte Funktion G auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Sie lässt sich also um $\zeta_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!}\,\zeta^n\,.$$

Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten Kreisscheibe um $\zeta_0 = 0$, auf der G holomorph ist. Hier konvergiert die Potenzreihe also für jedes $\zeta \in \mathbb{C}$.

Die Funktion $F(z) = G(1/z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und für $z \neq 0$, insbesondere also für $0 < |z| < 1$, gilt nach den obigen Überlegungen

$$F(z) = G(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!}\,\frac{1}{z^n}\,.$$

Also ist das Residuum von F in 0 gleich $\frac{G^{(1)}(0)}{1!} = G'(0)$. Wegen $G'(\zeta) = -e^{-\zeta}\sin\zeta + e^{-\zeta}\cos\zeta$ ergibt sich $\operatorname{res}(F;0) = 1$.

Bemerkung: Zur Bestimmung von $\operatorname{res}(F;0)$ kann man auch direkt die Potenzreihen von $e^{-\frac{1}{z}}$ und $\sin(\frac{1}{z})$ multiplizieren. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$e^{-\frac{1}{z}}\sin(\tfrac{1}{z}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,z^{-n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!}\,z^{-2k-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n!\,(2k+1)!}\,z^{-n-2k-1}\,.$$

Wegen $-n-2k-1 = -1 \iff n+2k = 0 \overset{n,k\in\mathbb{N}_0}{\iff} n = k = 0$ lautet der Koeffizient vor z^{-1}: $\frac{(-1)^{0+0}}{0!\,(2\cdot 0+1)!} = 1$, so dass das Residuum von F in 0 gleich 1 ist.

Die Funktion F ist als Komposition von auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorpher Funktionen wieder auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Die Singularität 0 liegt außerhalb der Kreislinie γ bzw. $|z-3| = 2$, denn $|0-3| = 3 > 2$. Also ist F holomorph in dem konvexen und damit einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 5/2\}$, in welchem auch die einfach geschlossene, positiv orientierte Integrationskurve γ verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 0\,.$$