Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2013
19.09.2013

Bachelor–Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Aufgabe 1 **(10 Punkte)** (3+3+4)

a) Es ist

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2 - 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta, \; z \in \mathbb{C},$$

gegeben. Berechnen Sie $f'(1+i)$.

b) Berechnen Sie $\oint_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1} dz$.

c) Entwickeln Sie $f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$ in eine Potenzreihe um $z_0 = 1$. Geben Sie den Konvergenzradius und $f^{(2013)}(1)$ an.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Es sind $f(t) = h(t)t^2$ und $g(t) = h(t)e^t$ $(t \in \mathbb{R})$ gegeben. Berechnen Sie $(f * g)(t)$ mit Hilfe des Faltungssatzes der Laplace Transformation.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab **11.10.2013**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2013s/`

im Internet.
Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den **23.10.2013**, von 16.00 Uhr bis 18.00 Uhr im HS a.F. (Geb. 50.35) statt.
Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **28.10.2013** bis **31.10.2013** im Allianzgebäude 05.20 (3.OG.).

Aufgabe 1)

a) Cauchy Integralformel: $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in \operatorname{int}(\gamma)$

Mit $\gamma : |\xi| = 3$, $z = 1+i \in \operatorname{int}(\gamma)$: $|1+i| = \sqrt{2} < 3$ und $g(\xi) = 3\xi^2 - 7\xi + 1$ hat man in der Aufgabe:

$$2\pi i\,(3z^2 - 7z + 1) = f(z)$$

$$\Rightarrow \underline{f'(1+i)} = 2\pi i\,(6z - 7)\big|_{z=1+i} = \underline{2\pi i\,(6i - 1)}$$

b) (Residuensatz) $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$: i und $-i$ sind für $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$ in $\{z \mid |z| < 2\}$ Polstellen 1. Ordnung.

$$\underline{\oint_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1}\, dz} = 2\pi i\,(\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i))$$

$$= 2\pi i \left(\frac{2z}{z+i}\Big|_{z=i} + \frac{2z}{z-i}\Big|_{z=-i} \right) = \underline{4\pi i}$$

c) (geometrische Reihe, Taylorreihe)

$$\underline{f(z) = \frac{2z+3}{z+1}} = \frac{2(z+1)+1}{z+1} = 2 + \frac{1}{z+1} = 2 + \frac{1}{2 + (z-1)}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \underline{2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k}(z-1)^k, \quad |z-1| < 2}$$

Mit $\frac{1}{k!} f^{(k)}(1) = (-1)^k \frac{1}{2^{k+1}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ erhält man

$$\underline{f^{(2013)}(1) = -\frac{(2013)!}{2^{2014}}}$$

KAI H 2013 17.9.2013 Lösungen

Aufgabe 2 (Faltungssatz, Partialbruchzerlegung)

$$f(t) = h(t)\,t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$g(t) = h(t)\,e^{t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; G(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$F(s)\,G(s) = \frac{2}{s^3(s-1)} \bullet\!\!-\!\!\circ\; (f*g)(t)\,h(t)$$

$$\frac{2}{s^3(s-1)} = -\frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s-1}$$

$$\underline{\left(-2-2t-t^2+2e^{t}\right)h(t) = (f*g)(t)\,h(t)}$$