Klausuraufgaben
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

23.09.2019

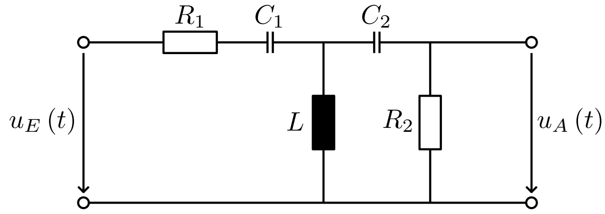
Die folgenden Seiten enthalten die Aufgaben der Klausur. Bitte vergewissern Sie sich, dass sowohl die Aufgabenblätter als auch die Lösungsblätter vollständig sind.
Die Aufgabenblätter umfassen 5 Seiten.

Die Lösungen sowie der vollständige Lösungsweg sind ausschließlich in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter einzutragen. Lösungen werden nur bewertet, sofern sie vollständig und wohlbegründet sind. Achsenbeschriftungen in Diagrammen sind Teil einer vollständigen Lösung. Bitte verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibgerät und keine Rotstifte.

Bitte tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem ersten Lösungsblatt ein und geben Sie am Ende der Prüfung alle Lösungsblätter ab.

Aufgabe 1

1.1 Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Eingangsspannung $u_E(t)$ auf die Ausgangsspannung $u_A(t)$ der folgenden Hochpassschaltung:



Die Kondensatoren sind hierbei zum Zeitpunkt $t = -0$ ungeladen, die Spule ist stromlos und der Ausgang unbelastet. Nehmen Sie vereinfachend an, dass $R_1 = R_2 = R$ sowie $C_1 = C_2 = C$ gilt.

1.2 Wie hängt die Übertragungsfunktion $G(s)$ mit der Sprungantwort eines Systems zusammen?

1.3 Nun wird ein allgemeines System dritter Ordnung mit der Eingangsgröße $u(t)$ und Ausgangsgröße $x(t)$ betrachtet. Das Systemverhalten wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$a_3\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3} + a_2\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0x(t) = b_3\frac{\mathrm{d}^3u(t)}{\mathrm{d}t^3} + b_2\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + b_1\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + b_0u(t) \tag{1}$$

Die Systemparameter a_i und b_i mit $i \in \{0,1,2,3\}$ seien hierbei reell. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems für verschwindende Anfangswerte.

1.4 Um die Parameter des Systems aus Teilaufgabe 1.3 zu bestimmen, wird es durch $u(t) = U_0\sigma(t)$ mit $U_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ angeregt. Bei Auswertung der Systemantwort ergeben sich folgende Erkenntnisse:

$$(I) \qquad x(+0) = 0 \tag{2}$$

$$(II) \qquad \left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=+0} = 0 \tag{3}$$

$$(III) \qquad 0 < \lim_{t\to\infty}\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = K < \infty \tag{4}$$

Welche Aussagen folgen daraus für die Parameter b_0, b_1, b_2 und b_3?

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgende meromorphe Funktion:

$$F(s) = \frac{1}{\sin(s)\left(1 - e^{-s}\right)} \tag{5}$$

2.1 Ermitteln Sie die Pole von $F(s)$ und geben Sie jeweils deren Vielfachheit an.

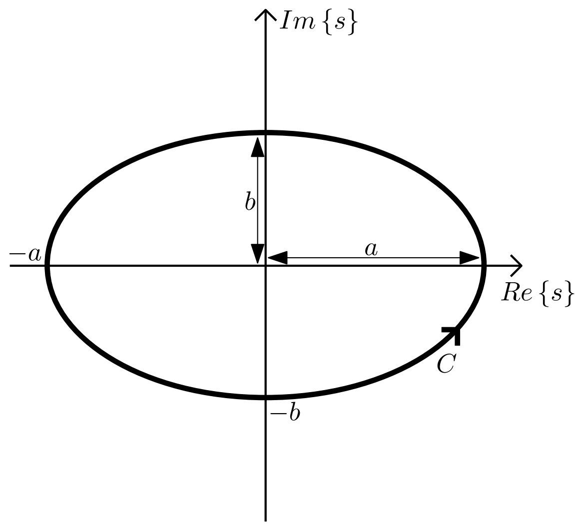
2.2 Bestimmen Sie die ersten vier von Null verschiedenen Glieder der Laurent-Entwicklung von $F(s)$ um $\alpha = 0$. Markieren Sie den Hauptteil der Laurent-Reihe in Ihrer Lösung. Es ist nicht erforderlich, die Lösung in geschlossener Form anzugeben.

Hinweis - Es gilt folgende Reihendarstellung:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{6}$$

2.3 Berechnen Sie die Residuen von $F(s)$.

2.4 Nun wird die folgende Kurve in Form einer Ellipse betrachtet:



Geben Sie alle Parameter a und b der Kurve C an, mit denen die folgenden drei Aussagen gelten:

$$(I) \quad \oint_C F(s)\,\mathrm{d}s = j\pi \tag{7}$$

$$(II) \quad a, b \neq m\pi \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}_{>0} \tag{8}$$

$$(III) \quad a, b > 0 \tag{9}$$

Hinweis - Falls Sie die vorigen Aufgaben nicht lösen konnten, können Sie in dieser Teilaufgabe von $\mathrm{res}_0 F(s) = \frac{3}{2}$ *ausgehen.*

Aufgabe 3

3.1 Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der folgenden Darstellung einer Rechteckschwingung auf Basis von Kosinusfunktionen mit $\omega_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_0 t) \mp ...\right) \tag{10}$$

Hinweis - Es ist nicht erforderlich eine geschlossene Lösung anzugeben!

3.2 Zeichnen Sie den Verlauf der Spektralfunktion $F(\omega)$ aus Teilaufgabe 3.1 für $\omega \in [-6\omega_0, 6\omega_0]$ in das Diagramm in den Lösungsblättern ein.

3.3 Die Rechteckschwingung aus Teilaufgabe 3.1 wird nun mit einem Signal $a(t)$ moduliert. Das Ausgangssignal der Modulation $y(t)$ ergibt sich wie folgt:

$$y(t) = f(t)\, a(t) \tag{11}$$

Die Fourier-Transformierte $A(\omega)$ von $a(t)$ hat hierbei die folgende Gestalt:

$$A(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) & \text{für } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{für } |\omega| \geq \omega_0 \end{cases} \tag{12}$$

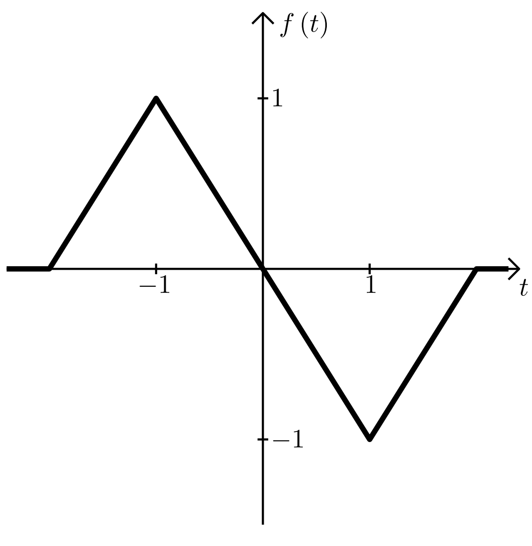
Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals $y(t)$ in Abhängigkeit von $A(\omega)$.

3.4 Zeichnen Sie $Y(\omega)$ aus Teilaufgabe 3.3 im Bereich $\omega \in [-6\omega_0, 6\omega_0]$ in das Diagramm in den Lösungsblättern ein.

3.5 Zeigen Sie durch Rechnung, dass die folgende Korrespondenz gilt, nennen Sie alle verwendeten Eigenschaften und Rechenregeln und zeigen Sie diese explizit in Ihren Zwischenschritten:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \tag{13}$$

3.6 Berechnen Sie nun die Fourier-Transformierte zu folgender Zeitfunktion $f(t)$ und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis, bis Sie eine Darstellung ohne Summen und Differenzen erreicht haben:



Aufgabe 4

4.1 Bestimmen Sie die Differenzengleichung, die man durch Approximation der folgenden Differentialgleichung mit Differenzenquotienten erhält:

$$T^2 \frac{\mathrm{d}^2 y\left(t\right)}{\mathrm{d}t^2} + 3T \frac{\mathrm{d}y\left(t\right)}{\mathrm{d}t} + 2y\left(t\right) = T \frac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t} + 3u\left(t\right) \tag{14}$$

Die Konstante $T \in \mathbb{R}_{>0}$ bezeichnet hierbei die Abtastzeit, also den zeitlichen Versatz zweier aufeinanderfolgender Abtastpunkte.

4.2 Geben Sie eine Differenzengleichung an, die die Folge $(f_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ erzeugt. Die Eingangsfolge (u_k) sowie sämtliche ihrer Ableitungen sollen hierbei verschwinden.

4.3 Nun ist die folgende Differenzengleichung mit $y_{-2} \neq 0, y_{-1} \neq 0$ und $u_{-1} \neq 0$ gegeben:

$$y_{k-2} - 5y_{k-1} + 6y_k = -u_{k-1} + 4u_k \tag{15}$$

Berechnen Sie die z-Transformierte $Y_z\left(z\right)$ in Abhängigkeit eines allgemeinen $U_z\left(z\right)$.

4.4 Berechnen Sie die Zahlenfolge (f_k) zu folgender z-Transformierten:

$$F_z\left(z\right) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}\right)} \tag{16}$$

Geben Sie Ihr Ergebnis in geschlossener Form an, also als Funktion von k und **nicht** durch Angabe der ersten Folgenglieder.

4.5 Zeigen Sie den folgenden Zusammenhang durch Rechnung:

$$\mathcal{Z}\left\{(f_k) - (f_{k-1})\right\} = \frac{z-1}{z} F_z\left(z\right) - f_{-1} \tag{17}$$

Nennen Sie alle Eigenschaften und Rechenregeln der z-Transformation, die Sie bei Ihrer Rechnung einsetzen.