Musterlösung

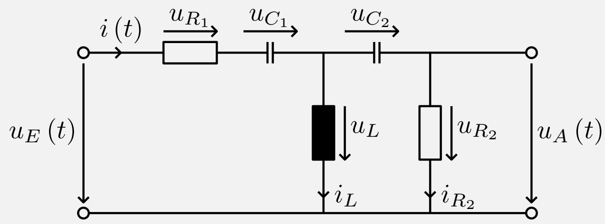
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

23.09.2019

Aufgabe 1

1.1

Zunächst werden die vorkommenden Spannungen und Ströme geeignet benannt:



Damit können folgende Maschengleichungen aufgestellt werden:

$$u_E(t) = u_{R_1}(t) + u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t) + u_A(t) \tag{1}$$
$$u_L(t) = u_{C_2}(t) + u_A(t) \tag{2}$$
$$u_A(t) = u_{R_2}(t) \tag{3}$$

Analog gilt die folgende Knotengleichung, da der Ausgang unbelastet ist:

$$i(t) = i_L(t) + i_{R_2}(t) \tag{4}$$

Im Laplace-Bereich gilt mit verschwindenen Anfangswerten:

$$U_{R_1}(s) = RI(s) \tag{5}$$
$$U_{C_1}(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \tag{6}$$
$$U_{C_2}(s) = \frac{1}{Cs} I_{R_2}(s) \tag{7}$$
$$U_L(s) = LsI_L(s) \tag{8}$$
$$U_{R_2}(s) = RI_{R_2}(s) \tag{9}$$

Betrachten der Ausgangsspannung liefert:

$$U_A(s) = RI_{R_2}(s) = R(I(s) - I_L(s)) = R\left(I(s) - \frac{U_L(s)}{Ls}\right) \tag{10}$$

Die Spannung über der Spule ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} U_L(s) = U_{C_2}(s) + U_A(s) &= \frac{1}{Cs} I_{R_2}(s) + U_A(s) = \frac{1}{RCs} U_A(s) + U_A(s) \\ &= \frac{1+RCs}{RCs} U_A(s) \end{aligned} \tag{11}$$

Der Gesamtstrom kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} U_E(s) &= U_{R_1}(s) + U_{C_1}(s) + U_L(s) \\ &= RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{1+RCs}{RCs} U_A(s) \end{aligned} \tag{12}$$

$$U_E(s) - \frac{1+RCs}{RCs} U_A(s) = \frac{1+RCs}{Cs} I(s) \tag{13}$$

$$I(s) = \frac{Cs}{RCs+1} U_E(s) - \frac{1}{R} U_A(s) \tag{14}$$

Einsetzen von (11) und (14) in (10) ergibt die Übertragungsfunktion:

$$U_A(s) = R\left(I(s) - \frac{U_L(s)}{Ls}\right) \tag{15}$$

$$= R\left(\frac{Cs}{RCs+1}U_E(s) - \frac{1}{R}U_A(s) - \frac{1}{Ls}\frac{1+RCs}{RCs}U_A(s)\right) \tag{16}$$

$$\left(2 + \frac{1+RCs}{LCs^2}\right)U_A(s) = \frac{RCs}{RCs+1}U_E(s) \tag{17}$$

$$G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)} = \frac{RLC^2s^3}{(1+RCs+2LCs^2)(RCs+1)} \tag{18}$$

1.2

Die Sprungantwort ist das Integral der Impulsantwort welche über die Laplace-Transformation mit der Übertragungsfunktion im Bildbereich korrespondiert.

1.3

Da die Anfangswerte verschwinden, gilt folgender Zusammenhang (analog für $u(t)$):

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} = s^n X(s) \tag{19}$$

Anwenden auf die gegebene Differentialgleichung liefert:

$$a_3s^3X(s) + a_2s^2X(s) + a_1sX(s) + a_0X(s) = b_3s^3U(s) + b_2s^2U(s) + b_1sU(s) + b_0U(s) \tag{20}$$

Ausklammern und dividieren liefert die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \tag{21}$$

1.4

Es gilt:

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{U_0}{s} \tag{22}$$

Betrachtung von (I) mit dem Anfangswertsatz:

$$x(+0) = \lim_{t\to+0} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} sG(s)U(s) = U_0 \lim_{s\to\infty} G(s) \stackrel{!}{=} 0 \tag{23}$$

Folglich muss der Zählergrad (ZG) von $G(s)$ kleiner sein, als der Nennergrad (NG) von $G(s)$. Betrachtung von (II) mit dem Anfangswertsatz ergibt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=+0} = \lim_{t\to+0}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{s\to\infty} s(sX(s)) = \lim_{s\to\infty} s\left(sG(s)\frac{U_0}{s}\right) = U_0\lim_{s\to\infty} sG(s) \stackrel{!}{=} 0 \tag{24}$$

Somit muss sogar ZG < NG − 1 gelten. Mit Betrachtung von (III) ergibt sich:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{s\to 0} s\frac{X(s)}{s} = U_0 \lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{s} \overset{!}{=} K < \infty \Rightarrow b_0 = 0 \tag{25}$$

Laut Aufgabenstellung kann der NG maximal drei sein, da ZG < NG − 1 kann er folglich nur zwei oder drei sein, da sonst keine sinnvollen Lösungen für ZG mehr möglich wären.
Fall 1 $a_3 = 0, a_2 \neq 0$: NG $= 2 \Rightarrow$ ZG $< 1 \Rightarrow$ ZG $= 0$; Da $b_0 = 0 \Rightarrow G(s) = \frac{0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = 0$. Dieser Fall ist aufgrund von (III) ausgeschlossen.
Fall 2 $a_3 \neq 0$: ZG $= 3 \Rightarrow$ NG $< 2 \Rightarrow b_3 = b_2 = 0$:

$$G(s) = \frac{b_1 s}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{26}$$

Mit (III) folgt somit:

$$U_0 \lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{s} \overset{!}{=} K \Leftrightarrow U_0 \lim_{s\to 0}\frac{b_1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \overset{!}{=} K \Leftrightarrow U_0 \frac{b_1}{a_0} \overset{!}{=} K \Leftrightarrow b_1 \overset{!}{=} \frac{K a_0}{U_0} \tag{27}$$

Hierbei muss $a_0 \neq 0$ gelten.

Aufgabe 2

2.1

Nullsetzen des Nenners liefert:

$$\sin(s)\left(1-e^{-s}\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{28}$$

$$\sin(s) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \tag{29}$$

$$\left(1-e^{-s}\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow e^{-s} \stackrel{!}{=} 1 = e^{j2k\pi} \Rightarrow \alpha_k = j2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \tag{30}$$

Somit liegt bei $s = 0$ ein doppelter Pol vor, die übrigen Pole sind jeweils einfach.

2.2

Für die Exponentialfunktion gilt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{31}$$

Damit ergibt sich:

$$F(s) = \frac{1}{\sin(s)(1-e^{-s})} = \frac{1}{\left(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} \mp ...\right)\left(1 - 1 + s - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} \mp ...\right)} \tag{32}$$

$$= \frac{1}{s^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{s^2}{3!} + \frac{s^4}{5!} \mp ...\right)\left(1 - \frac{s}{2!} + \frac{s^2}{3!} \mp ...\right)} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{s^2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}s + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)s^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{12}\right)s^3 + ...} \tag{34}$$

Koeffizientenvergleich des hinteren Bruchs liefert:

$$b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}s + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)s^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{12}\right)s^3 + ...} \tag{35}$$

$$1 = \left(1 - \frac{1}{2}s + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)s^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{12}\right)s^3 + ...\right)\left(b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ...\right) \tag{36}$$

$$1 = b_0 + \left(b_1 - \frac{1}{2}b_0\right)s + \left(b_2 - \frac{1}{2}b_1\right)s^2 + \left(b_3 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{24}b_0\right)s^3 + ... \tag{37}$$

Und somit:

$$b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{4}, b_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \tag{38}$$

Für $F(s)$ gilt damit:

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left(1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{12}s^3 + ...\right) = \underbrace{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s}}_{\text{Hauptteil}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}s + ... \tag{39}$$

2.3

Aus der vorigen Teilaufgabe ergibt sich für den doppelten Pol bei $s = 0$ ein Residuum von $\mathrm{res}_0 F(s) = \frac{1}{2}$. Da die restlichen Pole jeweils einfach sind können die Residuen wie folgt ausgewertet werden:

$$\mathrm{res}_{\alpha_k} F(s) = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} = \frac{1}{\cos(\alpha_k)\left(1 - e^{-\alpha_k}\right) + \sin(\alpha_k)\, e^{-\alpha_k}} \tag{40}$$

$$\mathrm{res}_{k\pi} F(s) = \frac{1}{\cos(k\pi)\left(1 - e^{-k\pi}\right) + \sin(k\pi)\, e^{-k\pi}} = \frac{(-1)^k}{1 - e^{-k\pi}}, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{j2k\pi} F(s) &= \frac{1}{\cos(j2k\pi)\left(1 - e^{-j2k\pi}\right) + \sin(j2k\pi)\, e^{-j2k\pi}} \\ &= \frac{1}{\sin(j2k\pi)} = \frac{2j}{e^{-2k\pi} - e^{2k\pi}}, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\end{aligned} \tag{42}$$

2.4

Der Wert des Kurvenintegrals kann mithilfe des Residuensatzes wie folgt bestimmt werden:

$$\oint_C F(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi j \sum_{\alpha_k \text{ in } C} \mathrm{res}_{\alpha_k} F(s) \tag{43}$$

Damit Forderung (I) erfüllt ist, muss die Summe folglich den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen. Da sowohl die Kurve als auch die Lage der Singularitäten symmetrisch zu den Koordinatenachsen sind, tauchen die Residuen in der Summe bei Variation von a und b immer paarweise auf:

$$\mathrm{res}_{k\pi} F(s) + \mathrm{res}_{-k\pi} F(s) = \frac{(-1)^k}{1 - e^{-k\pi}} + \frac{(-1)^k}{1 - e^{k\pi}} = (-1)^k \frac{1 - e^{k\pi} + 1 - e^{-k\pi}}{\left(1 - e^{k\pi}\right)\left(1 - e^{-k\pi}\right)} \tag{44}$$

$$= (-1)^k \frac{2 - e^{k\pi} - e^{-k\pi}}{1 - e^{k\pi} - e^{-k\pi} + 1} = (-1)^k \tag{45}$$

Analog gilt für die Residuen der Singularitäten auf der imaginären Achse:

$$\mathrm{res}_{jk\pi} F(s) + \mathrm{res}_{-jk\pi} F(s) = \frac{2j}{e^{-2k\pi} - e^{2k\pi}} + \frac{2j}{e^{2k\pi} - e^{-2k\pi}} \tag{46}$$

$$= 2j \frac{e^{-2k\pi} - e^{2k\pi} + e^{2k\pi} - e^{-2k\pi}}{\left(e^{-2k\pi} - e^{2k\pi}\right)\left(e^{2k\pi} - e^{-2k\pi}\right)} \tag{47}$$

$$= 2j \frac{0}{\left(e^{-2k\pi} - e^{2k\pi}\right)\left(e^{2k\pi} - e^{-2k\pi}\right)} \tag{48}$$

$$= 0 \tag{49}$$

Somit tragen die Residuen der Pole auf der imaginären Achse nicht zur Summe der Residuen bei. Der Parameter b hat folglich keinen Einfluss auf den Wert des Kurvenintegrals, mit den Einschränkungen (II) und (III) ergibt sich demnach $b \in (0, \infty) \setminus m\pi, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Aus Forderung (I) folgt:

$$\sum_{\alpha_k \text{ in } C} \mathrm{res}_{\alpha_k} F(s) \overset{!}{=} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k + 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \overset{!}{=} 0 \Rightarrow n \in \{2, 4, 6, ...\} \tag{50}$$

Also muss $2i\pi < a < (2i + 1)\pi, i \in \mathbb{N}$ gelten, um die Forderungen $(I), (II)$ und (III) zu erfüllen.

Aufgabe 3

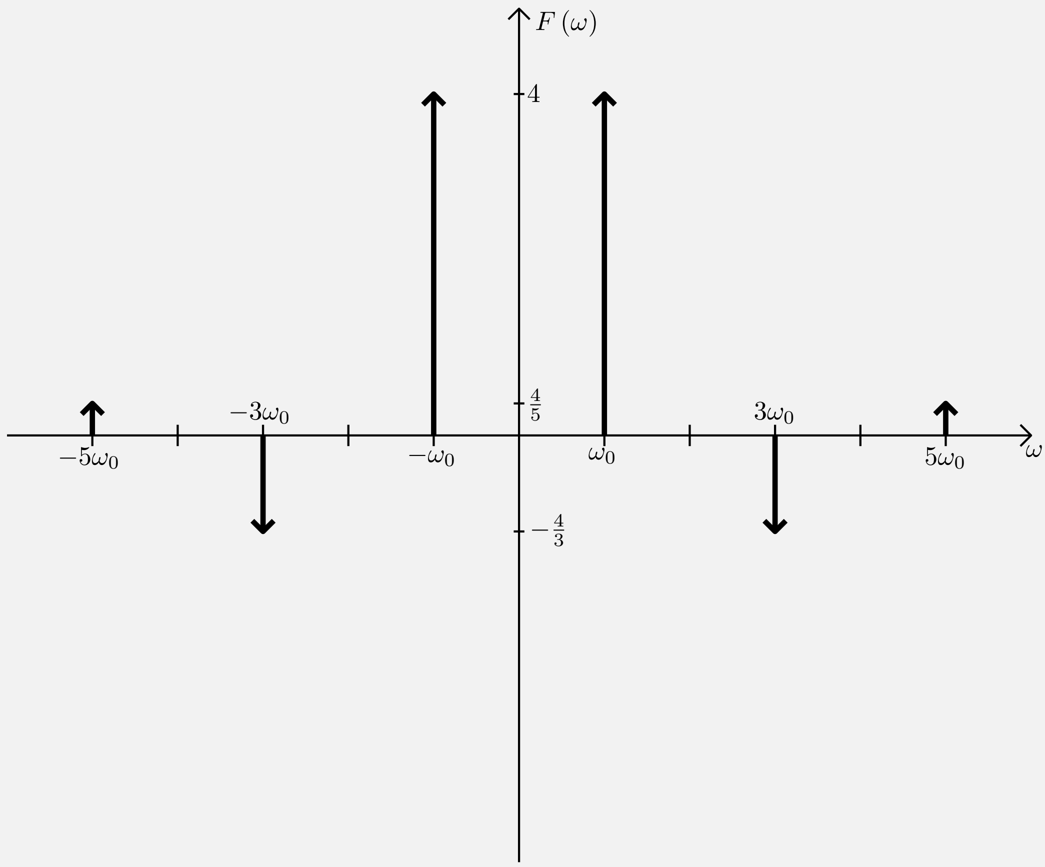
3.1

Mithilfe der Formelsammlung gilt:

$$\begin{aligned} F(\omega) = \frac{4}{\pi}\Big(&\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0) \\ &-\frac{1}{3}\pi\delta(\omega+3\omega_0)-\frac{1}{3}\pi\delta(\omega-3\omega_0) \\ &+\frac{1}{5}\pi\delta(\omega+5\omega_0)+\frac{1}{5}\pi\delta(\omega-5\omega_0)\mp\ldots\Big) \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) =& 4\delta(\omega+\omega_0)+4\delta(\omega-\omega_0) \\ &-\frac{4}{3}\delta(\omega+3\omega_0)-\frac{4}{3}\delta(\omega-3\omega_0) \\ &+\frac{4}{5}\delta(\omega+5\omega_0)+\frac{4}{5}\delta(\omega-5\omega_0)\mp\ldots \end{aligned} \tag{52}$$

3.2



3.3

Die Faltungsregel besagt, dass Folgendes gilt:

$$y(t) = f(t)\,a(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * A(\omega) \tag{53}$$

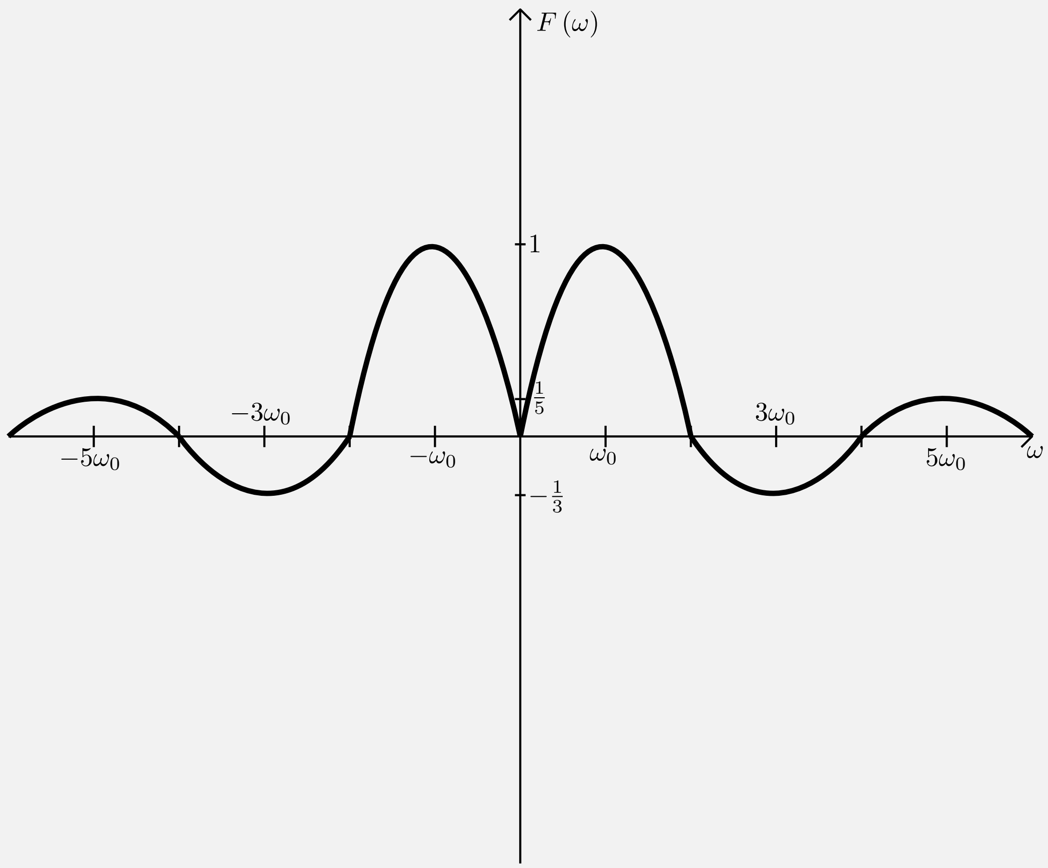
Ansatz:

$$\begin{aligned} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} A(\omega) * \Big(& 4\delta(\omega + \omega_0) + 4\delta(\omega - \omega_0) \\ & - \frac{4}{3}\delta(\omega + 3\omega_0) - \frac{4}{3}\delta(\omega - 3\omega_0) \\ & + \frac{4}{5}\delta(\omega + 5\omega_0) + \frac{4}{5}\delta(\omega - 5\omega_0) \mp \dots \Big) \end{aligned} \tag{54}$$

Mit den Eigenschaften des Dirac-Impulses ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y(\omega) = & \frac{2}{\pi} A(\omega + \omega_0) + \frac{2}{\pi} A(\omega - \omega_0) - \frac{2}{3\pi} A(\omega + 3\omega_0) - \frac{2}{3\pi} A(\omega - 3\omega_0) \\ & + \frac{2}{5\pi} A(\omega + 5\omega_0) + \frac{2}{5\pi} A(\omega - 5\omega_0) \mp \dots \end{aligned} \tag{55}$$

3.4



3.5

$$\mathcal{F}\left\{\delta\left(t\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t\right) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = e^{-j\omega 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t\right) \mathrm{d}t}_{1} = e^{0} = 1 \tag{56}$$

Genutzt wurden die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses, die Linearität des Integrals, sowie die Eigenschaft, dass das Integral über einen Dirac-Impuls eins ergibt.

3.6

Die Funktion $f\left(t\right)$ lässt sich wie folgt zerlegen:

$$f\left(t\right) = d_1\left(t+1\right) - d_1\left(t-1\right) \tag{57}$$

Die Formelsammlung enthält folgende Korrespondenz:

$$\mathcal{F}\left\{d_1\left(t\right)\right\} = \frac{4}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{58}$$

Mit dem Verschiebungssatz hat man:

$$d_1\left(t-a\right) = e^{-j\omega a} \frac{4}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{59}$$

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} F\left(\omega\right) = \mathcal{F}\left\{f\left(t\right)\right\} &= e^{j\omega} \frac{4}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - e^{-j\omega} \frac{4}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) && (60) \\ &= \left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) \frac{4}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) && (61) \\ &= 2j \sin\left(\omega\right) \frac{4}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) && (62) \\ &= \frac{8j}{\omega^2} \sin\left(\omega\right) \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) && (63) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

4.1

Zunächst werden die benötigten Differenzenquotienten aufgestellt:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T} \tag{64}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{y_k' - y_{k-1}'}{T} = \frac{\frac{y_k - y_{k-1}}{T} - \frac{y_{k-1} - y_{k-2}}{T}}{T} = \frac{1}{T^2}\left(y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}\right) \tag{65}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Differenzengleichung:

$$T^2 \frac{1}{T^2}\left(y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}\right) + 3T\frac{y_k - y_{k-1}}{T} + 2y_k = T\frac{u_k - u_{k-1}}{T} + 3u_k \tag{66}$$

$$y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2} + 3y_k - 3y_{k-1} + 2y_k = u_k - u_{k-1} + 3u_k \tag{67}$$

$$y_{k-2} - 5y_{k-1} + 6y_k = -u_{k-1} + 4u_k \tag{68}$$

4.2

Es gilt:

$$(f_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)} = \left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right) \tag{69}$$

Beginnend mit dem Wert 2 wird das jeweils vorausgegangene Folgenglied halbiert. Formuliert als Differenzengleichung ergibt dies:

$$f_k = \frac{1}{2} f_{k-1} \tag{70}$$

$$f_{-1} = 2 \tag{71}$$

4.3

Mit der Rechtsverschiebungsregel gilt:

$$y_{k-2} \overset{\mathcal{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} z^{-2}\left[Y_z(z) + zy_{-1} + z^2 y_{-2}\right] = z^{-2}Y_z(z) + z^{-1}y_{-1} + y_{-2} \tag{72}$$

$$y_{k-1} \overset{\mathcal{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} z^{-1}\left[Y_z(z) + zy_{-1}\right] = z^{-1}Y_z(z) + y_{-1} \tag{73}$$

$$y_k \overset{\mathcal{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} Y_z(z) \tag{74}$$

$$u_{k-1} \overset{\mathcal{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} z^{-1}\left[U_z(z) + zu_{-1}\right] = z^{-1}U_z(z) + u_{-1} \tag{75}$$

$$u_k \overset{\mathcal{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} U_z(z) \tag{76}$$

Somit ergibt sich:

$$z^{-2}Y_z(z) + z^{-1}y_{-1} + y_{-2} - 5\left(z^{-1}Y_z(z) + y_{-1}\right) + 6Y_z(z) = -z^{-1}U_z(z) - u_{-1} + 4U_z(z) \tag{77}$$

Auflösen nach $Y_z(z)$ liefert das Ergebnis:

$$Y_z(z) = \frac{\left(-z^{-1}+4\right) U_z(z) - u_{-1} - y_{-2} - y_{-1}z^{-1} + 5y_{-1}}{z^{-2} - 5z^{-1} + 6} \tag{78}$$

4.4

Zunächst muss das Polynom zweiter Ordnung faktorisiert werden:

$$z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \stackrel{!}{=} 0 \tag{79}$$

Somit gilt für $F_z(z)$:

$$F_z(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)^2} \tag{80}$$

Damit kann eine PBZ durchgeführt werden:

$$F_z(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z - \frac{1}{3}} + \frac{C}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2} \tag{81}$$

Erweitern mit $\left(z - \frac{1}{2}\right)$ und Auswerten bei $z = \frac{1}{2}$ ergibt:

$$A = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{36}} = 36 \tag{82}$$

Erweitern mit $\left(z - \frac{1}{3}\right)^2$ und Auswerten bei $z = \frac{1}{3}$ liefert:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{6}} = -6 \tag{83}$$

Auswerten bei $z = 0$ ergibt:

$$\frac{B}{-\frac{1}{3}} + \frac{36}{-\frac{1}{2}} + \frac{-6}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\frac{1}{9}} = -18 \tag{84}$$

$$B + 24 + 18 = 6 \Rightarrow B = -36 \tag{85}$$

Umschreiben von $F_z(z)$ erlaubt die Rücktransformation:

$$F_z(z) = \frac{36}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-36}{z - \frac{1}{3}} + \frac{-6}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2} = 36z^{-1}\frac{z}{z - \frac{1}{2}} - 36z^{-1}\frac{z}{z - \frac{1}{3}} - 6z^{-1}\frac{z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2} \tag{86}$$

$$(f_k) = 36\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\underbrace{\binom{k-1}{0}}_{1} - 36\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\underbrace{\binom{k-1}{0}}_{1} - 6\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\binom{k-1}{2-1}\right) \tag{87}$$

$$= 36\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 36\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 18\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{(k-1)!}{1!\,(k-2)!} \tag{88}$$

$$= 36\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 36\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 18(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \tag{89}$$

4.5

Ausnutzen von Linearität und Rechtsverschiebungsregel ergibt:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{(f_k)-(f_{k-1})\right\} &= \mathcal{Z}\left\{(f_k)\right\}-\mathcal{Z}\left\{(f_{k-1})\right\} = F_z\left(z\right)-z^{-1}\left[F_z\left(z\right)+zf_{-1}\right] &(90)\\ &= F_z\left(z\right)-z^{-1}F_z\left(z\right)-f_{-1} = \left(1-z^{-1}\right)F_z\left(z\right)-f_{-1} &(91)\end{aligned}$$

Multiplikation des ersten Terms mit $1=\frac{z}{z}$ liefert den gesuchten Zusammenhang:

$$\mathcal{Z}\left\{(f_k)-(f_{k-1})\right\} = \frac{z-1}{z}F_z\left(z\right)-f_{-1} \tag{92}$$