Klausuraufgaben

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

27.08.2020

Die folgenden Seiten enthalten die Aufgaben der Klausur. Bitte vergewissern Sie sich, dass sowohl die Aufgabenblätter als auch die Lösungsblätter vollständig sind.
Die Aufgabenblätter umfassen 5 Seiten.

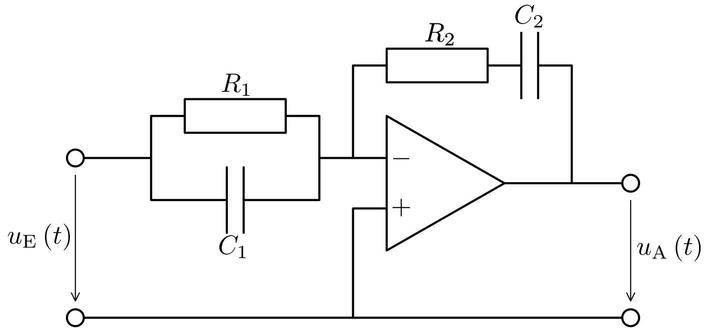
Die Lösungen sowie der vollständige Lösungsweg sind ausschließlich in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter einzutragen. Lösungen werden nur bewertet, sofern sie vollständig und wohlbegründet sind. Achsenbeschriftungen in Diagrammen sowie Orientierungen von Kurven sind Teil einer vollständigen Lösung. Bitte verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibgerät und keine Rotstifte.

Bitte tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem ersten Lösungsblatt ein und geben Sie am Ende der Prüfung alle Lösungsblätter ab.

Aufgabe 1

1.1 Bestimmen Sie die erste gewöhnliche sowie die erste verallgemeinerte Ableitung der Einheitssprungfunktion im Laplace-Bereich. Transformieren Sie Ihre Ergebnisse anschließend in den Zeitbereich.

1.2 Betrachten Sie die im Folgenden gegebene Schaltung, bei der es sich um die elektronische Realisierung eines idealen PID-Reglers handelt:



Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)}$ der Eingangsspannung $\mathcal{L}\{u_E(t)\} = U_E(s)$ zur Ausgangsspannung $\mathcal{L}\{u_A(t)\} = U_A(s)$. Der Ausgang sei wie in der Schaltung angegeben unbelastet, zu Beginn der Betrachtung seien alle Kondensatoren ungeladen und der Operationsverstärker verhalte sich optimal.

1.3 Existieren Systeme, deren Sprung- und Impulsantwort identisch sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.4 Das Verhalten eines technischen Systems wird durch die folgende Übertragungsfunktion beschrieben:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8s+5}{2s^2+8s+40} \tag{1}$$

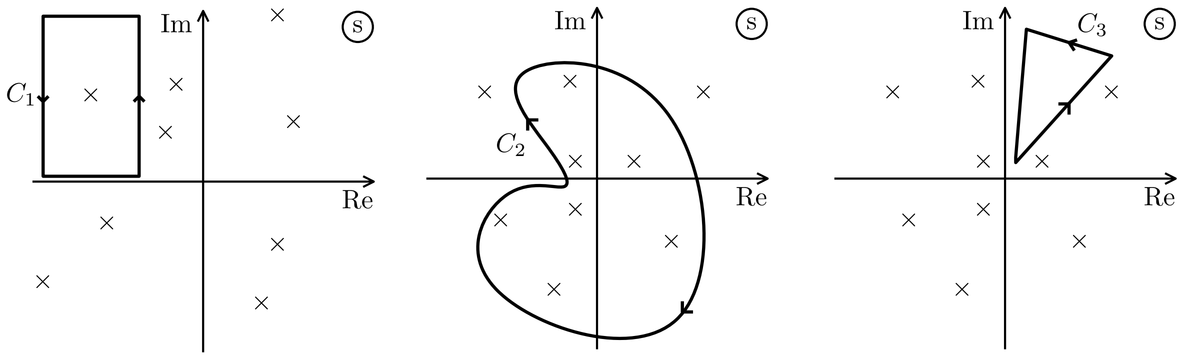
Hierbei gilt für die Eingangsgröße $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ und für die Ausgangsgröße $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Für $t < 0$ ist $u(t) \neq 0$ sowie $y(t) \neq 0$. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ gilt $u(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Am Ausgang ergibt sich damit für $t \geq 0$ der folgende Verlauf:

$$y(t) = 3e^{-2t}\cos(4t) \tag{2}$$

Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Anfangswerten $y'(-0)$ und $u(-0)$.

Aufgabe 2

2.1 Tragen Sie den Wert der Kurvenintegrale $\oint_{C_\mathrm{i}} F_\mathrm{i}(s)\,\mathrm{d}s$ für alle drei in den Abbildungen dargestellten $F_\mathrm{i}(s)$ und C_i in die Tabelle in den Lösungsblättern ein. Sämtliche Polstellen der $F_\mathrm{i}(s)$ wurden in den Abbildungen mit $\times$ markiert. An allen Polstellen gilt $\mathrm{res}_\times F_\mathrm{i}(s) = (2\pi j)^{-1}$.



(a) $F_1(s)$ (b) $F_2(s)$ (c) $F_3(s)$

2.2 Berechnen Sie alle Singularitäten der folgenden Funktion $F(s)$ und geben Sie deren Art und Vielfachheit an:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^3+1} \tag{3}$$

2.3 Bestimmen Sie den Wert des folgenden Kurvenintegrals der Funktion $F(s)$ aus Aufgabe 2.2:

$$\oint_C F(s)\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

Die Kurve C ist hierbei ein mathematisch positiv orientierter Kreis um $s = -\frac{3}{4}$ mit Radius $R = \frac{1}{2}$.

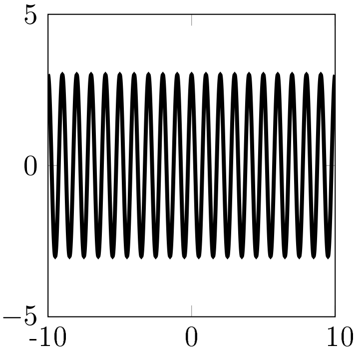
2.4 Wieviele Glieder umfasst der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von $F(s)$ aus Aufgabe 2.2 um die Stelle $s = -1$? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie den Hauptteil an!

2.5 Geben Sie die ersten beiden nicht verschwindenden Glieder der Laurent-Reihe der folgenden Funktion $G(s)$ um die Stelle $s = 0$ an:

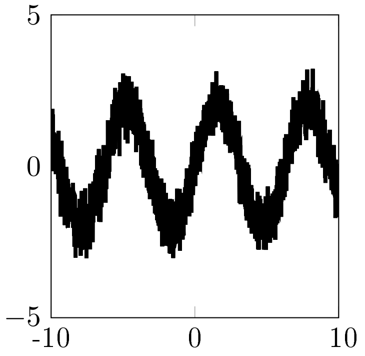
$$G(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{s\,(e^s - e^{-s})} \tag{5}$$

Aufgabe 3

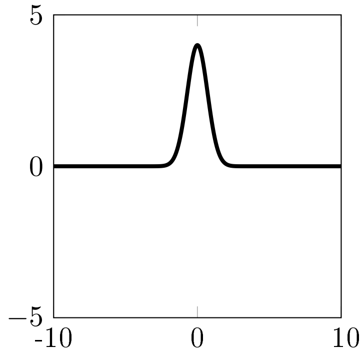
3.1 Ordnen Sie den folgenden Zeitfunktionen $f_{\mathrm{i}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_{\mathrm{i}}(\omega)\}$ jeweils die zugehörigen Fourier-Spektren $|F_{\mathrm{i}}(\omega)|$ zu, indem Sie die passenden Achsenbeschriftungen $|F_{\mathrm{i}}(\omega)|$ in die Kästen in den Lösungsblättern eintragen.



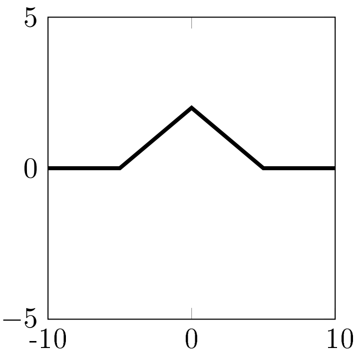
(a) $f_1(t)$



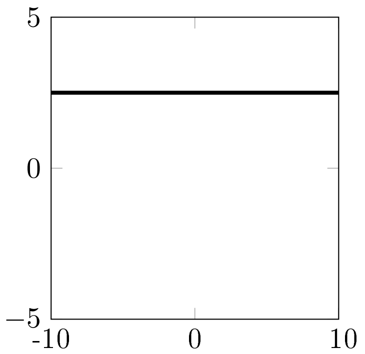
(b) $f_2(t)$



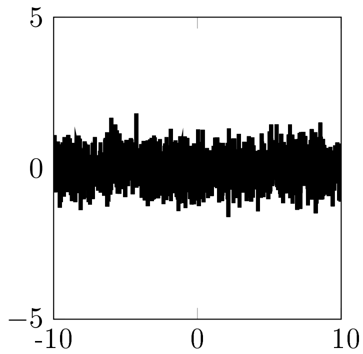
(c) $f_3(t)$



(d) $f_4(t)$



(e) $f_5(t)$



(f) $f_6(t)$

3.2 In einem Empfänger ergibt sich nach der Demodulation und Filterung ein Empfangssignal mit folgender Darstellung im Fourier-Bereich:

$$U(\omega) = \frac{2\sin(\omega T)\, e^{-j\omega T}}{\omega T\left(2 - e^{-j\omega\tau}\right)} \tag{6}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Zeitfunktion $u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega)\}$ und zeichnen Sie diese in das dafür vorgesehene Diagramm in den Lösungsblättern ein. Bei $T \in \mathbb{R}$ und $\tau \in \mathbb{R}, \tau > 2T$ handelt es sich um Konstanten. *Hinweis: Nutzen Sie die geometrische Reihe! Die Lösung muss nicht in geschlossener Form angegeben werden.*

3.3 Das Empfangssignal $u(t)$ aus Aufgabe 3.2 wird mithilfe eines Filters mit der Fourier-Darstellung $M(\omega)$ geglättet. Es gilt $M(\omega) = \mathcal{F}\{r_{\mathrm{T}}(t)\}$. Ermitteln Sie das Signal $y(t)$, das sich am Ausgang des Filters ergibt und zeichnen Sie es in das dafür vorgesehene Diagramm in den Lösungsblättern ein. Hierbei sei $\tau - T > 3T$.

3.4 Zeigen Sie die Gültigkeit der Multiplikationsregel der Fourier-Transformation mithilfe der bekannten Rechenregeln und Eigenschaften der Fourier-Transformation. Verzichten Sie hierbei auf die Nutzung der Definition der Fourier-Transformation.

Aufgabe 4

4.1 Bestimmen Sie die zur folgenden z-Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten Systems gehörende Differenzengleichung:

$$G_{\mathrm{z}}(z) = \frac{z^3 - z^2 + 1}{z^3 + z + 1} \tag{7}$$

4.2 Nun liege die folgende Eingangsgröße am System aus (7) an:

$$U_{\mathrm{z}}(z) = \frac{z}{z-1} \tag{8}$$

Hierbei ergibt sich am Ausgang des Systems die folgende Zahlenfolge (y_{k}):

$$(y_{\mathrm{k}}) = (4, 1, -4, -4, \dots) \tag{9}$$

Bestimmen Sie die Vergangenheitswerte y_{-1}, y_{-2} und y_{-3}.

4.3 Führen Sie mithilfe eines Reihenansatzes einen Koeffizientenvergleich durch um die ersten drei Folgenglieder f_0, f_1 und f_2 der Zahlenfolge zu bestimmen, die mit der folgenden z-Transformierten korrespondiert:

$$F_{\mathrm{z}}(z) = \frac{ze^{-a}\sin(b)}{z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}} \tag{10}$$

Hierbei sind $a \in \mathbb{R}$ sowie $b \in \mathbb{R}$ beliebig und konstant.

4.4 Bestimmen Sie die z-Transformierte der Funktion, die die folgende Darstellung im Laplace-Bereich hat:

$$F(s) = \frac{1}{1 + e^{-Ts}} \frac{s^2 + 4s + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s} \tag{11}$$

Die Konstante $T \in \mathbb{R}$ bezeichnet hierbei die Abtastzeit. Sie müssen Ihr Ergebnis im z-Bereich nicht vereinfachen.