Musterlösung

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

27.08.2020

Aufgabe 1

1.1

Laut Formelsammlung gilt:

$$\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \tag{1}$$

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(+0) \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(-0) \tag{3}$$

Einsetzen liefert:

$$\sigma'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s\frac{1}{s} - f(+0) = 1 - 1 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} \circ\!\!-\!\!\bullet s\frac{1}{s} - f(-0) = 1 - 0 = 1 \tag{5}$$

Die Rücktransformation mit der Formelsammlung ergibt:

$$\sigma'(t) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t) \tag{7}$$

1.2

Im Folgenden bezeichnet $i_\mathrm{d}(t)$ den Strom in den Operationsverstärker, $u_\mathrm{d}(t)$ bezeichnet den Spannungsabfall am Operationsverstärkereingang. Zunächst lassen sich folgende Maschengleichungen aufstellen:

$$u_\mathrm{E}(t) = u_{\mathrm{C}_1}(t) = u_{\mathrm{R}_1}(t) \tag{8}$$

$$0 = u_\mathrm{d}(t) + u_{\mathrm{R}_2}(t) + u_{\mathrm{C}_2}(t) + u_\mathrm{A}(t) \tag{9}$$

Zusätzlich ergeben sich folgende Knotengleichungen:

$$i_\mathrm{E}(t) = i_{\mathrm{R}_1}(t) + i_{\mathrm{C}_1}(t) \tag{10}$$

$$i_\mathrm{E}(t) = i_\mathrm{d}(t) + i_{\mathrm{R}_2}(t) \tag{11}$$

$$i_{\mathrm{R}_2}(t) = i_{\mathrm{C}_2}(t) \tag{12}$$

Für die Bauteilbeziehungen gilt:

$$u_{\mathrm{R}_1}(t) = R_1 i_{\mathrm{R}_1}(t) \tag{13}$$

$$u_{\mathrm{C}_1}(t) = \frac{1}{C_1}\int i_{\mathrm{C}_1}(t)\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

$$u_{\mathrm{R}_2}(t) = R_2 i_{\mathrm{R}_2}(t) \tag{15}$$

$$u_{\mathrm{C}_2}(t) = \frac{1}{C_2}\int i_{\mathrm{C}_2}(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

Einsetzen in die Bauteilbeziehungen liefert mit $i_{\mathrm{d}}(t) = u_{\mathrm{d}}(t) = 0$:

$$i_{\mathrm{R}_1}(t) = \frac{u_{\mathrm{E}}(t)}{R_1} \tag{17}$$

$$i_{\mathrm{C}_1}(t) = C_1 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{E}}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$

$$u_{\mathrm{R}_2}(t) = R_2 i_{\mathrm{E}}(t) = R_2 \left(\frac{u_{\mathrm{E}}(t)}{R_1} + C_1 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{E}}(t)}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{R_2}{R_1} u_{\mathrm{E}}(t) + R_2 C_1 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{E}}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{19}$$

$$u_{\mathrm{C}_2}(t) = \frac{1}{C_2} \int i_{\mathrm{E}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{C_2} \int \frac{u_{\mathrm{E}}(t)}{R_1} + C_1 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{E}}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{R_1 C_2} \int u_{\mathrm{E}}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{C_1}{C_2} u_{\mathrm{E}}(t) \tag{20}$$

Einsetzen der beiden letzten Gleichungen in die verbleibende Maschengleichung ergibt:

$$u_{\mathrm{A}}(t) = -u_{\mathrm{R}_2}(t) - u_{\mathrm{C}_2}(t) = -\left(\frac{R_2}{R_1} u_{\mathrm{E}}(t) + R_2 C_1 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{E}}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_1 C_2} \int u_{\mathrm{E}}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{C_1}{C_2} u_{\mathrm{E}}(t) \right) \tag{21}$$

Übergang in den Laplace-Bereich liefert:

$$U_{\mathrm{A}}(s) = -\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + R_2 C_1 s + \frac{1}{R_1 C_2} \frac{1}{s} \right) U_{\mathrm{E}}(s) \tag{22}$$

Die Übertragungsfunktion ergibt sich dann also zu:

$$G(s) = \frac{U_{\mathrm{A}}(s)}{U_{\mathrm{E}}(s)} = -\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + R_2 C_1 s + \frac{1}{R_1 C_2} \frac{1}{s} \right) \tag{23}$$

1.3

Die Sprungantwort ergibt sich gerade als Integral der Impulsantwort. Damit Sprung- und Impulsantwort identisch sein können, muss folglich das Integral der Impulsantwort wieder die Impulsantwort ergeben. Dies ist beispielsweise für $g(t) = 0$ der Fall, was gerade einem System entspricht, in dem der Eingang nicht auf den Ausgang einwirkt. Dementsprechend existieren Systeme, für die Sprung und Impulsantwort identisch sind.

1.4

Es gilt:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8s + 5}{2s^2 + 8s + 40} \Leftrightarrow Y(s)\left(2s^2 + 8s + 40\right) = (8s + 5)\,U(s) \tag{24}$$

Die Rücktransformation liefert die folgende Differentialgleichung, die das Systemverhalten im Zeitbereich beschreibt:

$$2\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 40y(t) = 8\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + 5u(t) \tag{25}$$

Diese kann mithilfe der Differntiationsregel wieder in den Laplace-Bereich überführt werden, um die Abhängigkeit von den Anfangswerten zu untersuchen:

$$2\left(s^2 Y(s) - sy(-0) - y'(-0)\right) + 8\left(sY(s) - y(-0)\right) + 40Y(s) = 8\left(sU(s) - u(-0)\right) + 5U(s) \tag{26}$$

Mit der Übertragungsfunktion kann die Ausgangsgröße wie folgt dargestellt werden:

$$Y(s) = G(s)\,U(s) + \frac{2y(-0)\,s + 2y'(-0) + 8y(-0) - 8u(-0)}{2s^2 + 8s + 40} \tag{27}$$

Da $u(t)$ für $t > 0$ verschwindet gilt $U(s) = 0$. Folglich gilt:

$$Y(s) = \frac{2y(-0)\,s + 2y'(-0) + 8y(-0) - 8u(-0)}{2s^2 + 8s + 40} \tag{28}$$

$$= \frac{y(-0)\,s + y'(-0) + 4y(-0) - 4u(-0)}{s^2 + 4s + 20} \tag{29}$$

Der bekannte Zeitverlauf kann mithilfe der Formelsammlung (Dämpfungsregel, Korespondenz Kosinus) ebenfalls in den Bildbereich überführt werden:

$$y(t) = 3e^{-2t}\cos(4t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s) = 3\frac{s+2}{s^2 + 4s + 2^2 + 4^2} = 3\frac{s+2}{s^2 + 4s + 20} \tag{30}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit (29) kann direkt abgelesen werden, dass Folgendes gilt:

$$y(-0) = 3 \tag{31}$$

Damit folgt durch erneuten Koeffizientenvergleich der gesuchte Zusammenhang:

$$y'(-0) = 6 - 4y(-0) + 4u(-0) \tag{32}$$

$$y'(-0) = -6 + 4u(-0) \tag{33}$$

Aufgabe 2

2.1

$\oint_{C_1} F_1(s)\,\mathrm{d}s$	1
$\oint_{C_2} F_2(s)\,\mathrm{d}s$	2
$\oint_{C_3} F_3(s)\,\mathrm{d}s$	0

2.2

Für Singularitäten muss gelten:

$$s^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow s^3 = -1 \tag{34}$$

Eine einfach ersichtliche Lösung ist $s_1 = -1$. Durch Polynomdivision erhält man folgende Darstellung:

$$s^3 + 1 = (s+1)\left(s^2 - s + 1\right) \tag{35}$$

Mithilfe von quadratischer Ergänzung kann nach Nullstellen des hinteren Terms gesucht werden:

$$s^2 - s + 1 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + 1 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{2}\right) \stackrel{!}{=} -\frac{3}{4} \Rightarrow s_{2,3} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{36}$$

Alternativ kann das gleiche Ergebnis durch Überlegung mit komplexer Exponentialfunktion ($s_1 = e^{-j\frac{\pi}{3}}$, $s_2 = e^{j\frac{\pi}{3}}$, $s_3 = e^{-j\pi}$ oder dritter Wurzel aus -1 erreicht werden. Bei allen Singularitäten handelt es sich um einfache Polstellen.

2.3

Der Kreis umschließt lediglich eine Polstelle, dementsprechend kann der Residuensatz wie folgt angewendet werden:

$$\oint_C F(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi j \operatorname{res}_{s_1} F(s) \tag{37}$$

Da es sich um den Spezialfall einfacher Polstellen handelt, können die Residuen wie folgt bestimmt werden:

$$\operatorname{res}_{s_\mathrm{i}} F(s) = \frac{P(s_\mathrm{i})}{Q'(s_\mathrm{i})} = \frac{e^{-s_\mathrm{i}}}{3s_\mathrm{i}^2} \tag{38}$$

Damit ergibt sich:

$$\operatorname{res}_{s_1} F(s) = \frac{e^{-(-1)}}{3(-1)^2} = \frac{e}{3} \tag{39}$$

Insgesamt hat das Kurvenintegral also den Wert:

$$\oint_C F(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi j \mathrm{res}_{s_1} F(s) = 2\pi j \frac{e}{3} \tag{40}$$

2.4

Da es sich um eine einfache Polstelle handelt, besteht der Hauptteil genau aus einem Glied. Da der Koeffizient a_{-1} gerade identisch mit dem Residuum der Funktion an der Entwicklungsstelle ist, kann der Hauptteil mit dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe direkt angegeben werden:

$$H(s) = \frac{e}{3}(s+1)^{-1} \tag{41}$$

2.5

Zunächst wird die Funktion auf eine Form gebracht, die eine kompaktere Reihenentwicklung erlaubt:

$$G(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{s(e^s - e^{-s})} = \frac{e^{2s}+1}{s(e^{2s}-1)} \tag{42}$$

Hieraus wird ersichtlich, dass es sich bei $s = 0$ um eine Polstelle zweiter Ordnung handelt. Einsetzen der bekannten Exponentialreihe ergibt:

$$G(s) = \frac{1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2s)^k}{k!}}{s\left(-1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2s)^i}{i!}\right)} \tag{43}$$

Aufgrund des Pols zweiter Ordnung ergibt sich folgender Ansatz für die Laurent-Entwicklung:

$$G(s) = \frac{1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2s)^k}{k!}}{s\left(-1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2s)^i}{i!}\right)} = \frac{a_{-2}}{s^2} + \frac{a_{-1}}{s} + a_0 + a_1 s + \dots \tag{44}$$

Mulitplikation mit dem Nenner ergibt:

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2s)^k}{k!} = s\left(-1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2s)^i}{i!}\right)\left(\frac{a_{-2}}{s^2} + \frac{a_{-1}}{s} + a_0 + a_1 s + \dots\right) \tag{45}$$

Optional kann zunächst noch vereinfacht werden:

$$2 + 2s + 2s^2 + \dots = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2s)^i}{i!}\right)\left(\frac{a_{-2}}{s} + a_{-1} + a_0 s + a_1 s^2 + \dots\right) \tag{46}$$

Damit können die gesuchten Koeffizienten durch einen Koeffizientenvergleich berechnet werden:

$$2 = 2a_{-2} \tag{47}$$

$$2 = 2a_{-1} + 2a_{-2} == 2a_{-1} + 2 \to a_{-1} = 0 \tag{48}$$

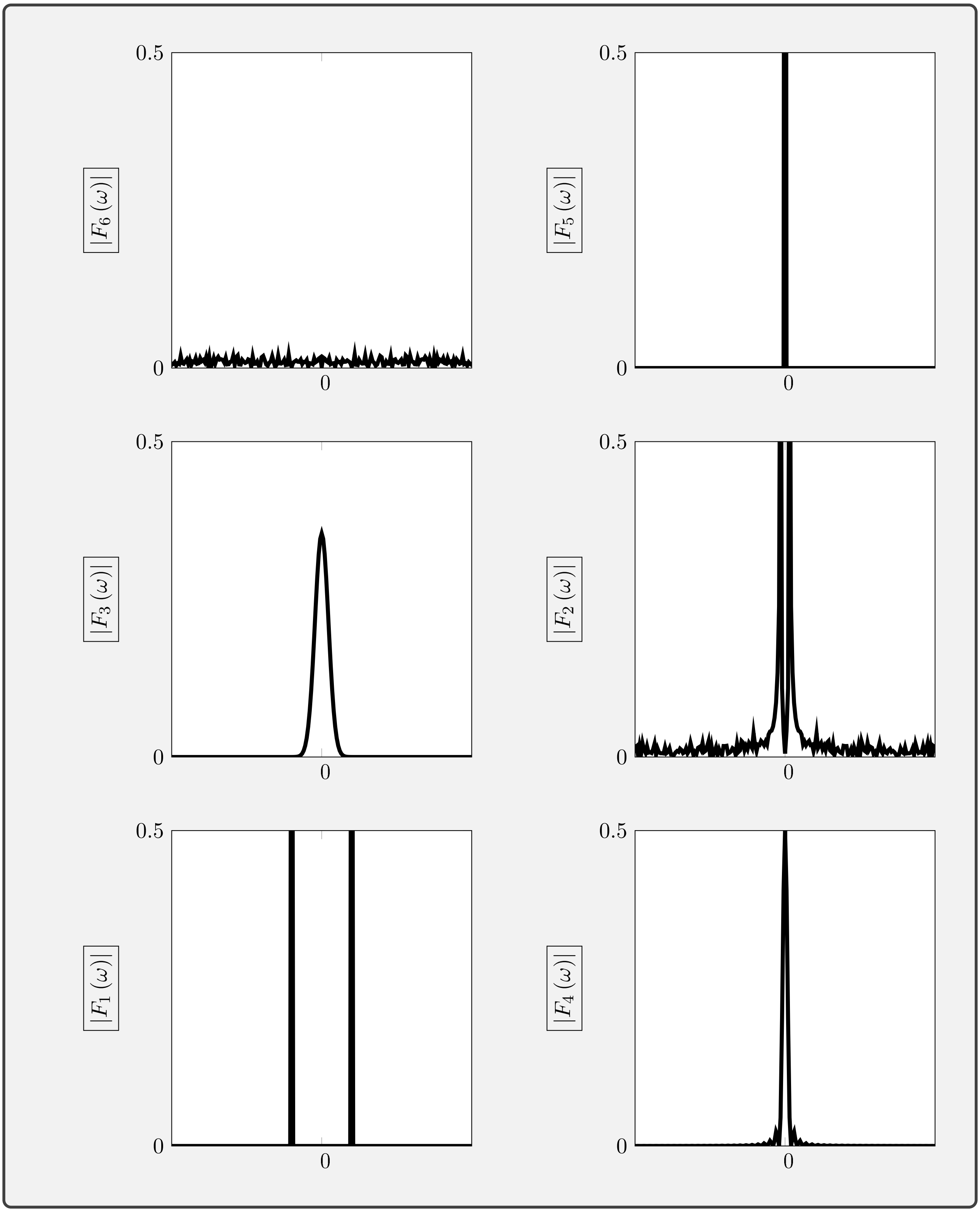
$$2 = \frac{8}{3!}a_{-2} + 2a_0 = \frac{8}{6} + 2a_0 \to a_0 = \frac{1}{3} \tag{49}$$

Somit können die gesuchten Glieder angegeben werden:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{3} \dots \tag{50}$$

Aufgabe 3

3.1



3.2

Zunächst wird die Fourier-Darstellung aufgeteilt, um bekannte Korrespondenzen (Rechteck) nutzen zu können:

$$U(\omega) = \frac{2\sin(\omega T)\,e^{-j\omega\tau}}{\omega T\,(2 - e^{-j\omega T})} = \frac{1}{T} e^{-j\omega T} \left(\frac{2}{\omega}\sin(\omega T)\right) \frac{1}{2 - e^{-j\omega\tau}} \tag{51}$$

Anwenden der geometrischen Reihe liefert:

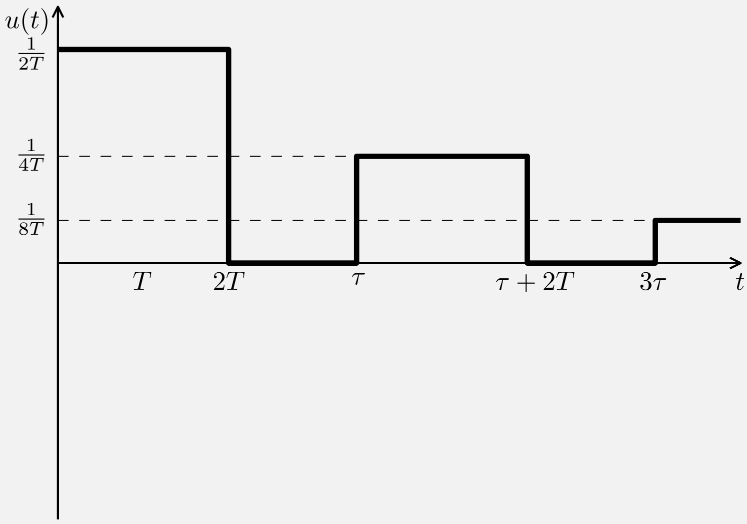
$$U(\omega) = \frac{1}{2T} e^{-j\omega T} \left(\frac{2}{\omega}\sin(\omega T)\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{-j\omega k\tau} \tag{52}$$

Das Produkt kann durch Anwendung der Zeitverschiebungs- und Faltungsregel mithilfe der Korrespondenztabelle in den Zeitbereich überführt werden:

$$u(t) = \frac{1}{2T} r_{\mathrm{T}}(t - T) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta(t - k\tau) \tag{53}$$

Nutzen der Ausblendeigenschaft des Dirac-Implses liefert das Ergebnis:

$$u(t) = \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} r_{\mathrm{T}}(t - T - k\tau) \tag{54}$$



3.3

Mit der Korespondenz aus der Formelsammlung ergibt sich die Fourier-Darstellung der Ausgangsgröße zu:

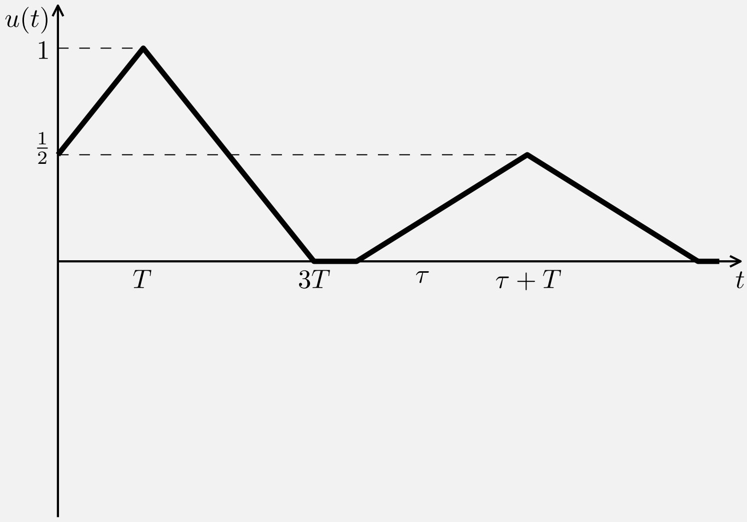
$$Y(\omega) = M(\omega)\,U(\omega) = \frac{1}{2T} e^{-j\omega T} \left(\frac{2}{\omega}\sin(\omega T)\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{-j\omega k\tau} \tag{55}$$

Mit der Korrespondenz eines Dreiecks der Ausdehnung $2T$ ergibt sich analog zur vorigen Aufgabe:

$$y(t) = d_{2\mathrm{T}}(t-T) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta(t-k\tau) \tag{56}$$

Erneut liefert die Ausblendeigenschaft das Ergebnis:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_{2\mathrm{T}}(t-T-k\tau) \tag{57}$$



3.4

Die am stärksten mit der Multiplikationsregel verwandte Rechenregel ist die Faltungsregel:

$$f_1(t) * f_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F_1(\omega) F_2(\omega) \tag{58}$$

In Kombination mit der Symmetrieregel ergibt sich:

$$F_1(t) F_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} 2\pi f_1(-\omega) * f_2(-\omega) \tag{59}$$

Gleichzeitig besagt die Symmetrieregel auch, dass Folgendes gilt:

$$\tilde{f}_1(t) := F_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \tilde{F}_1(\omega) := 2\pi f_1(-\omega) \tag{60}$$

$$\tilde{f}_2(t) := F_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \tilde{F}_2(\omega) := 2\pi f_2(-\omega) \tag{61}$$

Also ergibt sich:

$$f_1(-\omega) = \frac{\tilde{F}_1(\omega)}{2\pi} \tag{62}$$

$$f_2(-\omega) = \frac{\tilde{F}_2(\omega)}{2\pi} \tag{63}$$

Einsetzen von $\tilde{f}_1(t) = F_1(t)$ und $\tilde{f}_2(t) = F_2(t)$, (62) und (63) in (59) liefert:

$$\tilde{f}_1(t)\,\tilde{f}_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} 2\pi \frac{\tilde{F}_1(\omega)}{2\pi} * \frac{\tilde{F}_2(\omega)}{2\pi} \tag{64}$$

Da die Skalare vor die Faltung gezogen werden können ergibt sich die gesuchte Multiplikationsregel:

$$\tilde{f}_1(t)\,\tilde{f}_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{2\pi}\tilde{F}_1(\omega) * \tilde{F}_2(\omega) \tag{65}$$

Aufgabe 4

4.1

Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$G_{\mathrm{z}}(z) = \frac{Y_{\mathrm{z}}(z)}{U_{\mathrm{z}}(z)} = \frac{z^3 - z^2 + 1}{z^3 + z + 1} \tag{66}$$

Multiplikation mit den Nennern ergibt:

$$U_{\mathrm{z}}(z)\left(z^3 - z^2 + 1\right) = Y_{\mathrm{z}}(z)\left(z^3 + z + 1\right) \tag{67}$$

Multiplikation mit z^{-3} liefert:

$$U_{\mathrm{z}}(z)\left(1 - z^{-1} + z^{-3}\right) = Y_{\mathrm{z}}(z)\left(1 + z^{-2} + z^{-3}\right) \tag{68}$$

Anwendung der Verschiebungsregel der z-Transformation erlaubt die Rücktransformation und liefert somit die gesuchte Differenzengleichung:

$$y_{\mathrm{k}} + y_{\mathrm{k-2}} + y_{\mathrm{k-3}} = u_{\mathrm{k}} - u_{\mathrm{k-1}} + u_{\mathrm{k-3}} \tag{69}$$

4.2

Aus der Formelsammlung kann abgelesen werden, dass folgende Korrespondenz gilt:

$$U_{\mathrm{z}}(z) \overset{z}{\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ} (u_k) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots) \tag{70}$$

Mit der Differenzengleichung der vorigen Aufgabe ergibt sich:

$$y_{\mathrm{k}} = u_{\mathrm{k}} - u_{\mathrm{k-1}} + u_{\mathrm{k-3}} - y_{\mathrm{k-2}} - y_{\mathrm{k-3}} \tag{71}$$

Somit gilt für die Folgenglieder durch Einsetzen der bekannten Größen:

$$y_0 = 4 = 1 - 0 + 0 - y_{-2} - y_{-3} \tag{72}$$
$$y_1 = 1 = 1 - 1 + 0 - y_{-1} - y_{-2} \tag{73}$$
$$y_2 = -4 = 1 - 1 + 0 - 4 - y_{-1} \tag{74}$$

Durch Auswerten dieser Gleichungen von unten nach oben ergibt sich:

$$y_{-1} = 0 \tag{75}$$
$$y_{-2} = -1 \tag{76}$$
$$y_{-3} = -2 \tag{77}$$

4.3

Der Reihenansatz liefert:

$$F_{\mathrm{z}}(z) = \frac{ze^{-a}\sin(b)}{z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}} \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f_{\mathrm{k}} z^{-k} \tag{78}$$

Multiplikation mit dem Nenner ergibt:

$$0z^2 + e^{-a}\sin(b)\,z + 0z^0 \overset{!}{=} \left(z^2 - 2ze^{-a}\cos(b) + e^{-2a}\right)\sum_{k=0}^{\infty} f_{\mathrm{k}} z^{-k} \tag{79}$$

Anschließend kann ein Koeffizientenvergleich für die Koeffizienten zu z^2, z und z^0 durchgeführt werden, um die gesuchten Folgenglieder zu bestimmen:

$$0 = f_0 \tag{80}$$
$$e^{-a}\sin(b) = f_1 - 2e^{-a}\cos(b)\,f_0 = f_1 \tag{81}$$
$$0 = f_2 - 2e^{-a}\cos(b)\,f_1 + e^{-2a}f_0 = f_2 - 2e^{-2a}\cos(b)\sin(b) \tag{82}$$
$$\Leftrightarrow f_2 = 2e^{-2a}\cos(b)\sin(b) \tag{83}$$

4.4

Da sowohl für die Laplace-Transformation als auch für die z-Transformation eine Faltungsregel gilt, überträgt sich eine Multiplikation im z-Bereich direkt in eine Multiplikation im Laplace-Bereich, die beiden Teilprodukte $F_1(s)$ und $F_2(s)$ können also separat überführt werden.
Für den ersten Term gilt mit der geometrischen Reihe:

$$F_1(s) = \frac{1}{1+e^{-Ts}} = \frac{1}{1-\left(-e^{-Ts}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-kTs} \tag{84}$$

Da die Exponentialfunktionen mit verschobenen Dirac-Impulsen korrespondiert, ist ersichtlich, dass die aus der Vorlesung bekannte alternative Definition der z-Transformation genutzt werden kann, die einen direkten Bezug zwischen Laplace- und z-Transformierten herstellt:

$$F_1(s) = F_1^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-k}\Bigg|_{z=e^{Ts}} = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1} = F_{1\mathrm{z}}(z) \tag{85}$$

Der zweite Teil von $F(s)$ kann zunächst faktorisiert werden:

$$F_2(s) = \frac{s^2+4s+2}{s^3+3s^2+2s} = \frac{s^2+4s+2}{s\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)} \tag{86}$$

Damit lässt sich mithilfe einer Partialbruchzerlegung ein einfacher Übergang in den Zeitbereich durchführen, um anschließend in den z-Bereich zu transformieren:

$$\frac{s^2+4s+2}{s\,(s+1)\,(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \tag{87}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{s^2+4s+2}{(s+1)\,(s+2)} = \frac{2}{2} = 1 = A \tag{88}$$

$$\lim_{s\to -1} \frac{s^2+4s+2}{s\,(s+2)} = \frac{1-4+2}{-1} = 1 = B \tag{89}$$

$$\lim_{s\to -2} \frac{s^2+4s+2}{s\,(s+1)} = \frac{4-8+2}{2} = -1 = C \tag{90}$$

$$\frac{s^2+4s+2}{s\,(s+1)\,(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \tag{91}$$

Mit diesem Ergebnis kann $F_2\,(s)$ mithilfe der Formelsammlung zurück in den Zeitbereich überführt werden:

$$F_2\,(s)\,\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \bullet\!\!-\!\!\circ f_2\,(t) = \sigma\,(t) + e^{-t} - e^{-2t} \tag{92}$$

Dadurch, dass es sich bei $f_1\,(t)$ bereits um ein abgetastetes Signal handelt, wird $f_2\,(t)$ implizit mit der identischen Abtastzeit T abgetastet und es ergibt sich mit der Formelsammlung:

$$F_{2\mathrm{z}}\,(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-e^{-2T}} \tag{93}$$

Insgesamt ergibt sich die gesuchte z-Transformierte also zu:

$$F_{\mathrm{z}}\,(z) = F_{1\mathrm{z}}\,(z)\,F_{2\mathrm{z}}\,(z) = \frac{z}{z+1}\left(\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right) \tag{94}$$