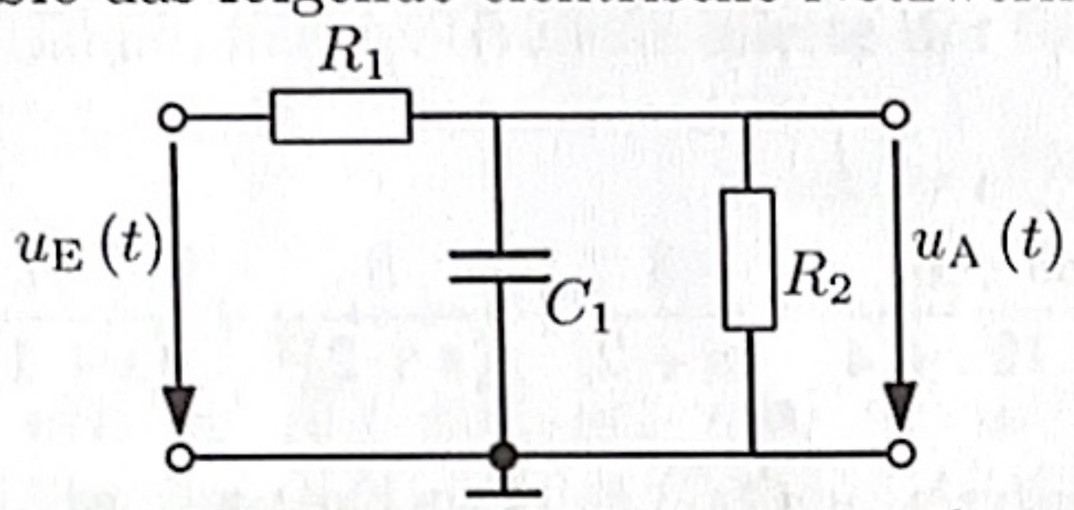
Aufgabe 1

1.1 Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind:

Jede Laplace-Transformierte $F(s)$ korrespondiert mit einer eindeutigen Zeitfunktion $f(t), t \geq 0$.	☐Richtig ☐Falsch
Sei $\frac{1}{s}e^{-st_0}$ die Übertragungsfunktion eines dynamischen Systems. Dann ist dieses System akausal.	☐Richtig ☐Falsch
Die Gewichtsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems ist identisch mit seiner Impulsantwort.	☐Richtig ☐Falsch
Das System $y(t) = 10u(t)$ mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ ist zeitvariant.	☐Richtig ☐Falsch

Tragen Sie hierfür Ihre Antworten in die Tabelle in den Lösungsblättern ein. Korrekt angekreuzte Antworten resultieren in der Vergabe eines Punkts. Falsche Antworten sowie fehlende Auswahl werden nicht bewertet.

1.2 Betrachten Sie das folgende elektrische Netzwerk:



Es gelten die nominierten und direkt einsetzbaren Bauteilwerte: $R_1 = 2, R_2 = 1, C_1 = \frac{1}{2}$.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)}$ des Systems.
- Bestimmen Sie die Impulsantwort $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ des Systems.

1.3 Ein anderes System besitzt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)} = 2 - \frac{4}{s+2} \tag{1}$$

Dabei gelten $\mathcal{L}\{u_A(t)\} = U_A(s)$ und $\mathcal{L}\{u_E(t)\} = U_E(s)$. Am Eingang wird $u_E(t) = t\sigma(t)$ angelegt. Bestimmen Sie den Zeitverlauf der Ausgangsgröße $u_A(t)$.

1.4 Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^t \sin(t-\tau)\cos(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

Im Ergebnis sollen weder eine Integration noch Faltungsoperatoren vorkommen. Geben Sie das Ergebnis im Zeitbereich an.
Hinweis: Transformieren Sie das Integral zunächst in den Laplace-Bereich. Verwenden Sie dabei die Faltungsregel. Verwenden Sie zum Schluss eine Korrespondenz aus der Formelsammlung.

1.5 Der Spannungsverlauf eines elektrischen Systems lässt sich durch die Zeitfunktion $u(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\sigma(t)$ beschreiben. Dabei gelten $U_0, R, C \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestimmen Sie den Anfangswert und den Endwert der Spannung $u(t)$ mittels der Grenzwertsätze. Nehmen Sie dabei an, dass die Grenzwerte existieren.

Aufgabe 2

Für die folgenden Teilaufgaben sei die Funktion gegeben:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(e^{-s}-1)} \tag{3}$$

2.1 Bestimmen Sie die Lage, Typ und Ordnung aller Singularitäten von $F(s)$.
Hinweis: Vergessen Sie die nichtreellen Lagen nicht.

2.2 Bestimmen Sie die ersten drei nicht verschwindenden Glieder der Laurent-Entwicklung von $F(s)$ um $s = 0$.
Hinweis: Die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion lautet: $e^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}$.

2.3 Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $F(s)$.
Hinweis: Die Partialbruchzerlegung berechnet sich aus der Summe aller Hauptteile der Laurent-Entwicklungen um deren jeweilige Polstellen. Dieser Zusammenhang muss hierzu nicht auf Richtigkeit geprüft werden. Sie müssen das Ergebnis nicht vereinfachen.

2.4 Bekannt sei die Beziehung:

$$G(s) = \frac{3s^3 + 18s^2 + 23s + 6}{s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4} = \frac{3}{s+2} + \frac{8}{(s+2)^2} + \frac{-2}{(s+1)^2}$$

Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\oint_C G(s)\, \mathrm{d}s$. Die Kurve C ist ein mathematisch positiv orientierter Kreis mit dem Radius $R = 4$ und dem Kreismittelpunkt in $s = 0$.

Aufgabe 3

3.1 Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind:

Die Fourier-Transformate $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ existiert nicht, wenn die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert \mathrm{d}t < +\infty$ nicht erfüllt ist.	☒Richtig	☐Falsch
Wenn eine reelle, ungerade Zeitfunktion $f(t)$ eine Fourier-Transformierte $F(\omega)$ besitzt, ist $F(\omega)$ imaginär und ungerade.	☒Richtig	☐Falsch

Tragen Sie hierfür Ihre Antworten in die Tabelle in den Lösungsblättern ein. Korrekt angekreuzte Antworten resultieren in der Vergabe eines Punkts. Falsche Antworten sowie fehlende Auswahl werden nicht bewertet.

3.2 Bekannt sei die Beziehung $t_1 + t_2 = t_3 + t_4$. Seien $f_1(t)$ und $f_2(t)$ stetige Funktionen. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von

$$f(t) = f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) - f_1(t - t_3) * f_2(t - t_4) \tag{4}$$

3.3 Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der folgenden Zeitfunktion über die Definition:

$$h(t) = e^{-b|t|}\mathrm{sign}(t) \tag{5}$$

3.4 Ein Signal $u(t) = A + \cos(\omega_0 t)$ wird mit $g(t) = \cos(\omega_\mathrm{T} t)$ moduliert. Es ergibt sich das modulierte Signal $y(t) = g(t)u(t)$. Dabei sind $A \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\omega_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ Konstante.

- Bestimmen Sie die Frequenzfunktion des Signals $u(t)$.
- Seien $A = 2$, $\omega_\mathrm{T} = 6$ und $\omega_0 = 1$. Zeichnen Sie die Frequenzfunktion $Y(\omega)$ des modulierten Signals $y(t)$ in das vorbereitete Diagramm in den Lösungsblättern ein. Beschriften Sie die Abszisse und die Ordinate mit geeigneten Skalen.

3.5 Der Wert des folgenden Integrals soll mit Hilfe der Parseval-Gleichung bestimmt werden:

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3(\omega T)}{\omega^3} \mathrm{d}\omega \tag{6}$$

Hinweise:
a) Die Parseval-Gleichung lautet: $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\bar{f}_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\bar{F}_2(\omega)\,d\omega$
b) Beschreiben Sie den Integranden zunächst als Produkt von zwei aus der Formelsammlung bekannten Frequenzfunktionen.
c) Sollten Sie die Aufgabe nicht lösen können, verwenden Sie als Ersatz
$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} r_T(t)\, d_{2T}(t)\, dt$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + T \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{T} \cdot u(t) \tag{7}$$

4.1 Bestimmen Sie die Differenzengleichung, die man durch Approximation der Differentialgleichung mit Differenzenquotienten erhält.
Hinweis: Die Approximation des Differentialquotienten einer Größe x erfolgt durch eine Abtastung mit einer positiven Abtastzeit $T \in \mathbb{R}_{>0}$ wie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{x_k - x_{k-1}}{T}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{T^2} \tag{8}$$

4.2 Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G_z(z) = \frac{Y_z(z)}{U_z(z)}$. Dabei gelten $U_z(z) = \mathcal{Z}\{(u_k)\}$ und $Y_z(z) = \mathcal{Z}\{(y_k)\}$.

4.3 Für ein anderes System lautet die Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich wie folgt:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left(1 - e^{-Ts}\right) \frac{1}{s^2} \tag{9}$$

Dabei bezeichnet T die Abtastzeit.

- Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G_z(z) = \frac{Y_z(z)}{U_z(z)}$.
  Hinweise:
  a) Der erste Teil $1 - e^{-Ts}$ korrespondiert mit einer Dirac-Impulsfolge und kann nach der alternativen Definition der z-Transformation direkt in den z-Bereich überführt werden.
  b) Der zweite Teil $\frac{1}{s^2}$ kann zunächst in den Zeitbereich zurücktransformiert werden, bevor eine z-Transformation dafür vorgenommen wird.
  c) Verwenden Sie dann die Faltungsregel der z-Transformation.
- Bestimmen Sie die Gewichtsfolge (g_k) des Systems mittels der Verschiebungsregel und einer Korrespondenz aus der Formelsammlung.
  Hinweise: Falls Sie die erste Teilaufgabe nicht lösen können, verwenden Sie dann die z-Übertragungsfunktion $G_z(z) = \frac{1}{z-1}$.
- Wie lautet die Ausgangsfolge, wenn $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$ an das System angelegt wird?