Diplom–Vorprüfung Integraltransformationen
bzw.
Bachelor-Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Setzt man in

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

die Anfangswerte $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$ ein, so ergibt sich für die Lösung y

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 1 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - s + 5\,.$$

Wendet man die Laplacetransformation auf die gegebene Differentialgleichung an, so gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$(s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - s + 5) + 6(s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 1) + 9\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$(s^2 + 6s + 9)\mathscr{L}\{y\}(s) - s - 1 = \frac{1}{(s+3)^2},$$

also

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{s+1}{(s+3)^2} + \frac{1}{(s+3)^4} = \frac{1}{s+3} - \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{1}{(s+3)^4} \\ &= \mathscr{L}\{e^{-3t} - 2te^{-3t} + \frac{1}{3!}\,t^3e^{-3t}\}(s).\end{aligned}$$

Also löst die durch

$$y(t) = e^{-3t} - 2te^{-3t} + \frac{1}{6}\,t^3e^{-3t}, \qquad t \geqslant 0,$$

definierte Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ das gegebene Anfangswertproblem.

b) Es gilt

$$\mathbf{A} \leftrightsquigarrow \text{III}), \quad \mathbf{B} \leftrightsquigarrow \text{II}), \quad \mathbf{C} \leftrightsquigarrow \text{IV}), \quad \mathbf{D} \leftrightsquigarrow \text{I}).$$

c) **i)** Allgemein besitzt ein durch $a_2y'' + a_1y' + a_0y = b_1u' + b_0u$ gegebenes System die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{b_1s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$. Somit sind $a_2 = 1, a_1 = 3, a_0 = 0, b_1 = 6, b_0 = 9$.

ii) Da man zur Eingangsgröße $u = [\sigma]$ die Sprungantwort y des Systems erhält, gilt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = G(s)\cdot\mathscr{L}\{\sigma\}(s) = \frac{6s+9}{s(s+3)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{6s+9}{s^2(s+3)}.$$

Da $s = 0$ eine doppelte und $s = -3$ eine einfache Polstelle von $\frac{6s+9}{s^2(s+3)}$ ist, lautet der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{6s+9}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3}$$

für gewisse $A, B, C \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $A = 1, B = 3, C = -1$. Also ist

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s+3} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \big(1 + 3t - e^{-3t}\big)\sigma(t).$$

Demnach lautet die Sprungantwort des Systems $y = \big[(1 + 3t - e^{-3t})\sigma(t)\big]$.
Da die Impulsantwort des Systems die distributionelle Ableitung der Sprungantwort ist, ergibt sich für die Impulsantwort $\big[(3 + 3e^{-3t})\sigma(t)\big]$.

Aufgabe 2

a) Sei $a > 0$. Ist $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(t) := \cos(at)$, definiert, so gilt für jedes $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \cos(a\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t g(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = (g * y)(t).$$

Wir wenden die Laplacetransformation auf die gegebene Gleichung $(g * y)(t) = t\,\sin(at)$ an und erhalten mit Hilfe der Faltungsregel für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$\mathscr{L}\{g\}(s) \cdot \mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t\,\sin(at)\}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{s}{s^2+a^2} \cdot \mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{2a}{s^2+a^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 2\sin(at)\sigma(t).$$

Also erfüllt die durch $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y(t) = 2\sin(at)$ gegebene Funktion die Gleichung $\int_0^t \cos(a\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = t\,\sin(at)$ für alle $t \geqslant 0$.

b) Für $t \in [0,3)$ gilt $|f(t)| \leqslant 2$ und für $t \geqslant 3$ gilt $|f(t)| = e^{-3}e^t$. Folglich ist $\gamma_{min} = 1$ das kleinste $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \gamma$ konvergent ist. Um $\mathscr{L}\{f\}$ zu bestimmen, stellen wir f mit Hilfe des Einheitssprungs σ dar: Für jedes $t \geqslant 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= (2-t)\big(\sigma(t) - \sigma(t-3)\big) + e^{t-3}\sigma(t-3) \\ &= 2\sigma(t) - t\sigma(t) + (t-3)\sigma(t-3) + \sigma(t-3) + e^{t-3}\sigma(t-3). \end{aligned}$$

Anwendung der Verschiebungs- und Dämpfungsregel ergibt für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s-1}.$$

c) **i)** Um $D[g] = [\sigma(t-1)]$ nachzuweisen, muss man $\langle D[g], \varphi\rangle = \langle [\sigma(t-1)], \varphi\rangle$ für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ zeigen. Ist $\varphi \in \mathscr{D}$, so gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \geqslant b$. Nach Definition der Ableitung von Distributionen gilt

$$\begin{aligned} \langle D[g], \varphi\rangle &= -\langle [g], \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi'(t)\, dt = -\int_1^{\infty} (t-1)\varphi'(t)\, dt \\ &= -\int_1^b (t-1)\varphi'(t)\, dt \overset{\text{part. Int.}}{=} -\left(\Big((t-1)\varphi(t)\Big)\Big|_1^b - \int_1^b \varphi(t)\, dt\right) \\ &= \int_1^b \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-1)\varphi(t)\, dt = \langle [\sigma(t-1)], \varphi\rangle. \end{aligned}$$

ii) Hier muss man $\langle D(D[g]), \varphi\rangle = \delta_1(\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ nachrechnen. Ist $\varphi \in \mathscr{D}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \geqslant b$, so gilt

$$\begin{aligned}\langle D(D[g]), \varphi\rangle &\overset{\text{i)}}{=} \langle D([\sigma(t-1)]), \varphi\rangle = -\langle[\sigma(t-1)], \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-1)\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_1^{\infty} \varphi'(t)\,dt = -\int_1^b \varphi'(t)\,dt = -\varphi(t)\big|_1^b = -\big(\varphi(b) - \varphi(1)\big) \\ &= \varphi(1) = \delta_1(\varphi).\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$F(z) = z^{-6}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k-5}}{(2k+1)!} = \frac{z^{-3}}{3!} - \frac{z^{-1}}{5!} + \frac{z}{7!} - \frac{z^3}{9!} + - \dots$$

Aus der Laurententwicklung von F um 0 liest man ab: $\operatorname{res}(F;0) = -\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}$.

b) **i)** Der Integrand $F(z) := \dfrac{1-\cos(z)}{z^2-1}$ besitzt in -1 und 1 jeweils einfache Polstellen. Da nur 1 innerhalb des Integrationsweges $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$ liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z-(1+i)|=\sqrt{2}} \frac{1-\cos(z)}{z^2-1}\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;\,1).$$

Mit

$$\operatorname{res}(F;1) = \Big((z-1)F(z)\Big)\Big|_{z=1} = \frac{1-\cos(z)}{z+1}\Big|_{z=1} = \frac{1-\cos(1)}{2}$$

erhält man als Ergebnis

$$\int_{|z-(1+i)|=\sqrt{2}} F(z)\,dz = \pi i(1-\cos(1)).$$

ii) Der Integrand $F(z) := \dfrac{e^z}{(z+1)^2}$ hat in -1 eine Polstelle zweiter Ordnung. Diese liegt innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$. Wegen

$$\operatorname{res}(F;-1) = \frac{d}{dz}\Big((z+1)^2F(z)\Big)\Big|_{z=-1} = \frac{d}{dz}e^z\Big|_{z=-1} = e^z\Big|_{z=-1} = e^{-1}$$

folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;-1) = 2e^{-1}\pi i.$$

c) Die Funktion

$$\widetilde{F}(s) := \frac{6s+9}{s^3+3s^2} = \frac{6s+9}{s^2(s+3)}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0,-3\}$. Für $|s| > 3$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|\widetilde{F}(s)| \leqslant \frac{6|s|+9}{|s|^2|s+3|} \leqslant \frac{6|s|+9}{|s|^2(|s|-3)} \longrightarrow 0 \qquad (|s| \to \infty)\,.$$

Also sind die Voraussetzungen des Hinweises erfüllt. Danach gilt für $c > 0$ und $t > 0$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = \operatorname{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s);0) + \operatorname{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s);-3)$$

bzw. nach der komplexen Umkehrformel

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s+9}{s^3+3s^2}\right\}(t) = \operatorname{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s); 0) + \operatorname{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s); -3).$$

Da 0 eine Polstelle zweiter Ordnung von $s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s)$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s); 0) &= \frac{d}{ds}\left(s^2\, e^{st}\, \frac{6s+9}{s^2(s+3)}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(e^{st}\, \frac{6s+9}{s+3}\right)\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left(6e^{st} - \frac{9e^{st}}{s+3}\right)\bigg|_{s=0} = \left(6te^{st} - \frac{9te^{st}(s+3) - 9e^{st}}{(s+3)^2}\right)\bigg|_{s=0} \\
&= 6t - \frac{9t \cdot 3 - 9}{9} = 3t + 1.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\operatorname{res}(s \mapsto e^{st}\widetilde{F}(s); -3) = \frac{(6s+9)e^{st}}{\frac{d}{ds}\,(s^3+3s^2)}\bigg|_{s=-3} = \frac{-9e^{-3t}}{(3s^2+6s)|_{s=-3}} = -e^{-3t}.$$

Hiermit folgt

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s+9}{s^3+3s^2}\right\}(t) = 3t + 1 - e^{-3t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Aufgabe 4

a) Für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-2} e^{-i\omega t} e^{t}\,dt + \int_{2}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-t}\,dt \\
&= \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{-2} e^{(1-i\omega)t}\,dt + \lim_{\beta\to\infty} \int_{2}^{\beta} e^{-(1+i\omega)t}\,dt \\
&= \lim_{\alpha\to-\infty} \left[\frac{1}{1-i\omega}\, e^{(1-i\omega)t}\right]_{t=\alpha}^{-2} + \lim_{\beta\to\infty} \left[\frac{-1}{1+i\omega}\, e^{-(1+i\omega)t}\right]_{t=2}^{\beta} \\
&= \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{1}{1-i\omega}\left(e^{-2(1-i\omega)} - e^{(1-i\omega)\alpha}\right) - \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{1+i\omega}\left(e^{-(1+i\omega)\beta} - e^{-2(1+i\omega)}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{e^{-2(1-i\omega)}}{1-i\omega} + \frac{e^{-2(1+i\omega)}}{1+i\omega} = e^{-2}\left(\frac{e^{2i\omega}}{1-i\omega} + \frac{e^{-2i\omega}}{1+i\omega}\right) \\
&= e^{-2}\,\frac{e^{2i\omega} + i\omega e^{2i\omega} + e^{-2i\omega} - i\omega e^{-2i\omega}}{1+\omega^2} \\
&= \frac{e^{-2}}{1+\omega^2}\left(2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}\right) + 2i^2\omega \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{2i\omega} - e^{-2i\omega}\right)\right) \\
&= \frac{2e^{-2}}{1+\omega^2}\Big(\cos(2\omega) - \omega\sin(2\omega)\Big),
\end{aligned}$$

also ist $\mathscr{F}f$ reellwertig.

In $(*)$ wurde verwendet: $|e^{(1-i\omega)\alpha}| = e^{\alpha} \to 0\,(\alpha \to -\infty)$ sowie $|e^{-(1+i\omega)\beta}| = e^{-\beta} \to 0\,(\beta \to \infty)$.

b) **i)** Ist

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{für } t \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

gesetzt, dann gilt laut Hinweis

$$(\mathscr{F}\varphi)(\omega) = \begin{cases} 2\,\frac{\sin(\omega/2)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{für } \omega = 0 \end{cases} \qquad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Wegen $g(t) = \varphi(t - \frac{1}{2})$, $t \in \mathbb{R}$, liefert die Verschiebungsregel der Fouriertransformation

$$(\mathscr{F}g)(\omega) = e^{-i\omega/2}(\mathscr{F}\varphi)(\omega) = \begin{cases} 2e^{-i\omega/2}\,\frac{\sin(\omega/2)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{für } \omega = 0 \end{cases} \qquad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Im Fall $\omega \neq 0$ ist

$$(\mathscr{F}g)(\omega) = 2e^{-i\omega/2}\,\frac{\sin(\omega/2)}{\omega} = 2\,\frac{e^{-i\omega/2}}{\omega}\,\frac{1}{2i}\Big(e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}\Big) = -i\,\frac{1 - e^{-i\omega}}{\omega}$$

und man erhält für $h(t) := tg(t)$

$$(\mathscr{F}h)(\omega) = i \cdot \mathscr{F}\big(t \mapsto (-it)g(t)\big)(\omega) = i \cdot \frac{d}{d\omega}\,(\mathscr{F}g)(\omega) = \frac{d}{d\omega}\,\frac{1 - e^{-i\omega}}{\omega} = \frac{(i\omega + 1)e^{-i\omega} - 1}{w^2}.$$

Außerdem ist für $\omega = 0$

$$(\mathscr{F}h)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

ii) Die Faltung von g und h ist gegeben durch

$$g * h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (g * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)\,h(\tau)\,d\tau.$$

Wegen $g(t) = h(t) = 0$ für $t < 0$ gilt $(g * h)(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$(g * h)(t) = \int_0^t g(t - \tau)\,h(\tau)\,d\tau \qquad \text{für } t \geqslant 0.$$

Zur Berechnung dieses Integrals unterscheiden wir drei Fälle:
1. Fall: $t \in [0, 1)$. Es gilt

$$(g * h)(t) = \int_0^t 1 \cdot h(\tau)\,d\tau = \int_0^t \tau\,d\tau = \frac{1}{2}\,t^2.$$

2. Fall: $t \in [1, 2)$. Es gilt

$$\begin{aligned}(g * h)(t) &= \int_0^t g(t - \tau)h(\tau)\,d\tau = \int_0^1 g(t - \tau)\,\tau\,d\tau \\ &\overset{\text{Subst. } u=t-\tau}{=} \int_{t-1}^t g(u)(t - u)\,du = \int_{t-1}^1 (t - u)\,du \\ &= \Big[tu - \frac{1}{2}\,u^2\Big]_{u=t-1}^1 = t - \frac{1}{2}\,t^2.\end{aligned}$$

3. Fall: $t \in [2, \infty)$. Es gilt

$$(g * h)(t) = \int_0^t g(t - \tau)h(\tau)\,d\tau = \int_0^1 g(\underbrace{t - \tau}_{\geqslant t-1 \geqslant 1})\,\tau\,d\tau = 0.$$

Insgesamt erhält man

$$(g * h)(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in (-\infty, 0) \\ t^2/2 & \text{für } t \in [0, 1) \\ t - t^2/2 & \text{für } t \in [1, 2) \\ 0 & \text{für } t \in [2, \infty) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$