UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Wintersemester 2008/09
07.02.2009

Diplom–Vorprüfung Integraltransformationen

bzw.

Bachelor-Modulprüfung

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Aufgabe 1 (3+2+5=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie mit der Laplacetransformationsmethode die Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

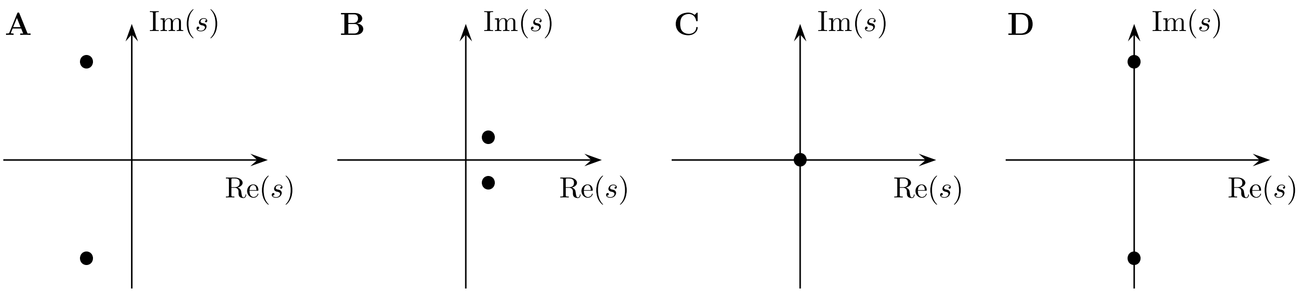
$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = te^{-3t}\,, \qquad t \geqslant 0\,,$$

die den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = -5$$

genügt.

b) Die Systeme $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ seien durch $y'' + ay' + by = u$ (mit Eingang u und Ausgang y) und ihre Poldiagramme gegeben:



Ordnen Sie jedem System zu, ob die zugehörige Sprungantwort

I) eine Dauerschwingung mit konstanter Amplitude enthält.

II) eine aufklingende Schwingung enthält.

III) eine abklingende Schwingung enthält.

IV) keine Schwingungsterme enthält.

c) Das Übertragungsglied eines Systems mit Eingang u und Ausgang y sei durch die Differentialgleichung

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = b_1u' + b_0u \tag{$*$}$$

gegeben mit Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$. Dieses System besitze die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{6s+9}{s(s+3)}\,.$$

i) Geben Sie den Wert der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 in $(*)$ an.

ii) Bestimmen Sie die Sprungantwort und die Impulsantwort des Systems.

Aufgabe 2 (3+4+3=10 Punkte)

a) Sei $a > 0$. Bestimmen Sie eine Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $t \geqslant 0$ gilt:

$$\int_0^t \cos(a\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = t\, \sin(at)\,.$$

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 2-t & \text{für } t \in [0,3) \\ e^{t-3} & \text{für } t \geqslant 3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Bestimmen Sie das kleinste $\gamma \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \gamma$ konvergent ist. Wie lautet $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für diese s?

c) Sei

$$g(t) = \begin{cases} t-1 & \text{für } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{für } t < 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Zeigen Sie **anhand der Definition** der distributionellen Ableitung:

i) $D[g] = [\sigma(t-1)]\,,$ wobei σ den Einheitssprung bezeichnet.

ii) $D\big(D[g]\big) = \delta_1\,.$

Hinweis: Es ist $\varphi \in \mathscr{D}$ genau dann, wenn $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar ist und $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \notin [a,b]$.

Aufgabe 3 (3+4+3=10 Punkte)

a) Die Funktion $F\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$F(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^6}\,.$$

Bestimmen Sie die Laurententwicklung von F um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und geben Sie $\operatorname{res}(F;0)$ an.

b) Bestimmen Sie für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die folgenden Kurvenintegrale:

i) $$\int_{|z-(1+i)|=\sqrt{2}} \frac{1-\cos(z)}{z^2-1}\,dz = \int_\gamma \frac{1-\cos(z)}{z^2-1}\,dz\,, \qquad \text{wobei } \gamma(t) = (1+i) + \sqrt{2}e^{it}\,;$$

ii) $$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^2}\,dz = \int_\gamma \frac{e^z}{(z+1)^2}\,dz\,, \qquad \text{wobei } \gamma(t) = 2e^{it}\,.$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der komplexen Umkehrformel:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s+9}{s^3+3s^2}\right\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ verschieden, $c > \max\big(\operatorname{Re}(a_1), \ldots, \operatorname{Re}(a_m)\big)$ und ist

$$\widetilde{F}\colon \mathbb{C}\setminus\{a_1, \ldots, a_m\} \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion mit $|\widetilde{F}(s)| \longrightarrow 0$ für $|s| \to \infty$, dann gilt für jedes $t > 0$:

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(e^{st}\widetilde{F}(s); a_j)\,.$$

Was hat das mit $\mathscr{L}^{-1}\{\widetilde{F}\}(t)$ zu tun?

Aufgabe 4 (4+3+3=10 Punkte)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} e^{-|t|} & \text{für } |t| \geqslant 2 \\ 0 & \text{für } |t| < 2 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Berechnen Sie $\mathscr{F} f$ und entscheiden Sie, ob $\mathscr{F} f$ reellwertig ist.

b) Seien

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0,1] \\ 0 & \text{für } t \notin [0,1] \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

und

$$h(t) = t\,g(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \in [0,1] \\ 0 & \text{für } t \notin [0,1] \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

i) Bestimmen Sie $\mathscr{F} g$ und $\mathscr{F} h$, indem Sie verwenden:
Ist

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{für } t \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})\,,$$

so gilt

$$\mathscr{F} \varphi(\omega) = \begin{cases} 2\,\frac{\sin(\omega/2)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{für } \omega = 0 \end{cases} \qquad (\omega \in \mathbb{R})\,.$$

ii) Berechnen Sie $g * h$.
Hinweis: Sind $\phi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar und ist ψ beschränkt, so ist

$$\phi * \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Gilt zusätzlich $\phi(t) = \psi(t) = 0$ für $t < 0$, so ist $\phi * \psi(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$\phi * \psi(t) = \int_{0}^{t} \phi(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den **11.02.2009**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianzgebäude 05.20) aus.

Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den **12.02.2009**, von 14:00 bis 15:00 Uhr im Seminarraum S 34 (Mathematikgebäude 20.30) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **16.02.2009** bis **20.02.2009**.