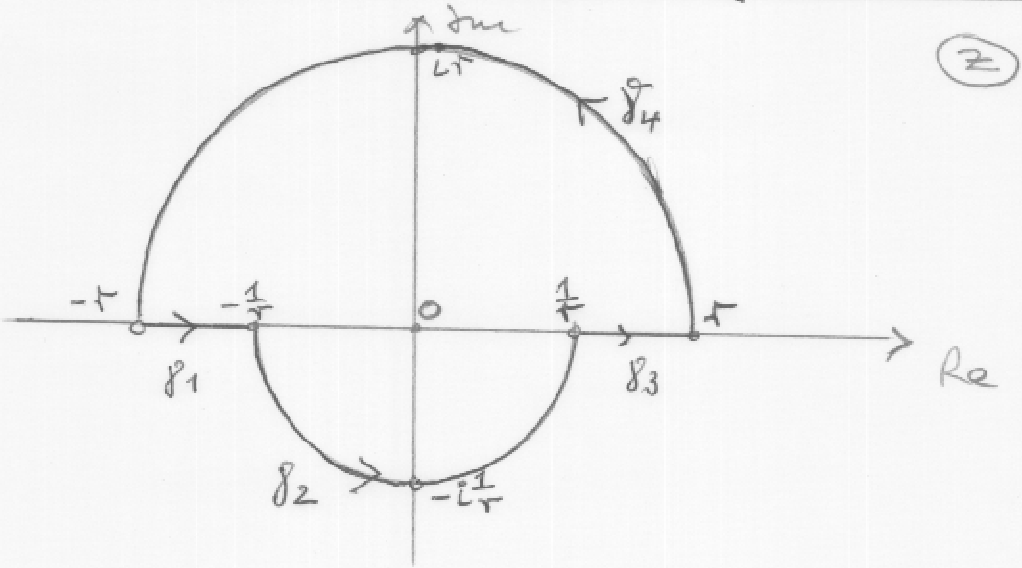
Klausur KAI März 2011 Lösungen

A1) a)



γ ist eine einfach geschlossene Kurve. 0 ist die einzige isolierte Sing (Pol 1. Ordnung) innerhalb von γ der Funktion $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$.

Es gilt $\underline{\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,0)}$ (Residuensatz).

Aus $f(z) = \frac{1-(1+iz+\frac{1}{2}(iz)^2+\dots)}{z^2} = -\frac{i}{z} - \frac{1}{2}i^2 + \dots$ liest man ab:

$\underline{\mathrm{Res}(f,0) = -i}$ $\Rightarrow$ $\underline{\int_{\gamma} f(z)\,dz} = -i2\pi i = \underline{2\pi}$

A1) b) Mit $z = e^{it}$ wird $\cos t = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ und $dt = \frac{dz}{iz}$:

$$\underline{\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz(2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

$$\underline{\text{Res-Satz}} \quad \overset{\downarrow}{=} 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{2}{i}\,\frac{1}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}, \sqrt{3}-2\right)$$

$$= 4\pi \,\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}\Big|_{z=\sqrt{3}-2} = \underline{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

A2 Wende $\mathcal{L}$ auf die Gleichung an. Mit $Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t)$ erhält man:

$$s^2 Y(s) - y'(0) - s y(0) + 2(s Y(s) - y(0)) + 5 Y(s) = \frac{5}{s}$$

Mit $y(0) = 0$ ergibt sich:

$$(*) \qquad \underline{Y(s) = \frac{y'(0)}{s^2+2s+5} + \frac{5}{s(s^2+2s+5)}}$$

<u>Rücktransformation</u> ($Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t)$)

Wir verwenden $s^2+2s+5 = (s+1)^2+4$,

$$\underline{\frac{1}{s^2+2s+5} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t}$$

wegen: $\frac{2}{s^2+4} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \sin 2t$

und: $\frac{2}{(s+1)^2+4} \bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{-t} \sin 2t$

und: Mit $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2+4}$ und $f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$

gilt $\frac{1}{s} F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, \int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau \, d\tau$

$$\overset{\text{Hinweis}}{=} -\frac{1}{10} e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{5} e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{5}$$

$(*) \implies y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \, (y'(0) - 1) - e^{-t} \cos 2t + 1$

$y(\frac{\pi}{4}) = 1 \implies y'(0) = 1 \implies$

$$\underline{y(t) = 1 - e^{-t} \cos 2t, \quad t \geq 0}$$